Second degré
1ère

Sacha Darthenucq

Prérequis:

- **Vocabulaire ensembliste et logique (1ère)**

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition: Soit $f \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$ une fonction, on dit que f est une fonction polynôme du second degré ssi il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Remarque: Une fonction polynôme de degré 1 est une fonction de la forme $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$.

Définition: Soit f une fonction polynôme du second degré. On appelle racines de f l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = 0$.

1.2 Factorisation

La factorisation des polynômes du second degré est le coeur de ce chapitre !

On considère une fonction polynôme f telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.
Nous allons essayer de factoriser ce polynôme, c'est à dire l'exprimer comme un produit de polynômes de degré 1.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + 2 \times \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \end{aligned}$$

Nous faisons apparaître une identité remarquable (en bleu): $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2 \times \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ en ajoutant artificiellement $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ que l'on retire ensuite Continuons la factorisation:

$$f(x) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$
$$f(x) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$$

Nous sommes maintenant à une étape relativement importante de la factorisation.

Définition: On appelle discriminant du polynôme le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$f(x) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

En fonction du signe de Δ nous allons pouvoir ou non continuer la factorisation.

- Si $\Delta > 0$, alors $\sqrt{\Delta}$ existe,
$$f(x) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\sqrt{\Delta}^2}{4a^2}\right)$$
$$f(x) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right)$$
On utilise à présent l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
$$f(x) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$
$$= a\left(x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$
$$f(x) = a\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$
À savoir redémontrer sans hésitation et à connaître par coeur !

- Si $\Delta = 0$, alors $f(x) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{0}{4a^2}\right)$
$f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

- Si $\Delta < 0$, alors $\sqrt{\Delta}$ n'existe pas, on ne peut pas mieux factoriser,
$f(x) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right)$

  Remarque: Cette expression de f est toujours vraie (contrairement aux deux premières qui n'existent que si $\Delta > 0$ ou $\Delta = 0$).

2 Étude

Grâce à nos formidables formes factorisées nous allons pouvoir étudier proprement notre fonction f en fonctions des paramètres a et Δ.

2.1 Équation $f(x) = 0$

Nous allons résoudre l'équation $f(x) = 0 \iff ax^2 + bx + c = 0$ en fonction du signe de Δ:

- Si $\Delta > 0$, alors $f(x) = a\left(x - \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$,

  Notons $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

  $f(x) = a(x - x_2)(x - x_1)$,

  $f(x) = 0 \iff (x - x_2)(x - x_1) = 0$,

  Il s'agit d'une équation produit nul, donc

  $$f(x) = 0 \iff x - x_1 = 0 \text{ ou } x - x_2 = 0$$
  $$f(x) = 0 \iff x = x_1 \text{ ou } x = x_2$$

  Propriété: Soit f une fonction polynôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, telle que $\Delta(= b^2 - 4ac) > 0$. Alors les deux racines de f sont solution du système : $\begin{cases} x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$

  Démo: $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

  Soit $ax^2 + bx + c = ax^2 + a(-x_1 - x_2)x + ax_1x_2$

  Par identification des coefficients du polynôme: $\begin{cases} ax_1x_2 = c \\ a(-x_1 - x_2) = b \end{cases}$

  Méthode: Factorisation à l'aide des racines "évidentes"

  Il est souvent plus simple de chercher une racine évidente du polynôme (s'il en possède), c'est à dire de trouver un x_1 tel que $f(x_1) = 0$, que de tout résoudre de manière fastidieuse avec le discriminant. Pour ce faire on teste quelques valeurs de x comme 0, 1, -1 ...

  Une fois cela fait, on sait que la deuxième racine x_2 vérifie $x_2 = \dfrac{c}{ax_1}$ $(x_1 \neq 0)$, ou $x_2 = -\dfrac{b}{a} - x_1$.

  Exemple: $f(x) = 4x^2 + 2x - 6$, on s'aperçoit que 1 est racine évidente du polynômes, $x_1 = 1$.

  La deuxième racine vérifie $x_2 = \dfrac{6}{4 \times 1} = \dfrac{3}{2}$.

  Les deux racines du polynôme sont 1 et $\dfrac{3}{2}$ et $f(x) = 4(x - 1)(x - \dfrac{3}{2})$.

- Si $\Delta = 0$, alors $f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

$$\begin{aligned} f(x)=0 &\iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \\ &\iff x+\frac{b}{2a}=0 \\ f(x)=0 &\iff x=-\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

- Si $\Delta < 0$, alors $f(x) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\right)$

  Rappel: pour tout $y \in \mathbb{R}$, $y^2 \geq 0$.

  $-\Delta > 0$ d'où $\frac{-\Delta}{4a^2} > 0$ et de plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$,

  D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2} > 0$, ne s'annule jamais !

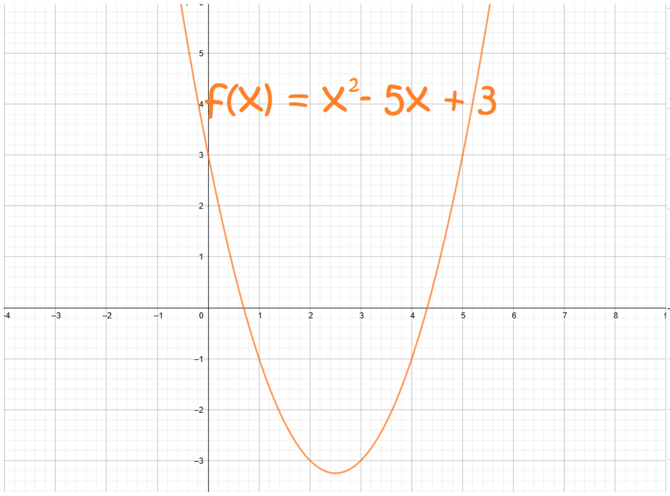
  Ainsi l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution.

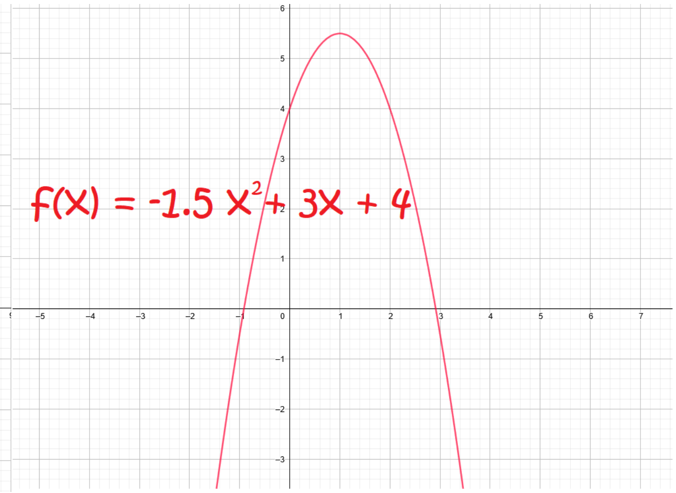
2.2 Inéquation

Nous allons maintenant étudier le signe de notre fonction polynômes en fonction des paramètres a et Δ, ce qui nous permettra donc de résoudre des inéquations du type $f(x) \leq 0$ par exemple.

- Si $\Delta > 0$, alors $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $x_1 < x_2$, réalisons le tableau de signe de f:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$(x - x_1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x - x_2)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$		signe de a	0	$-$signe de a	0	signe de a	

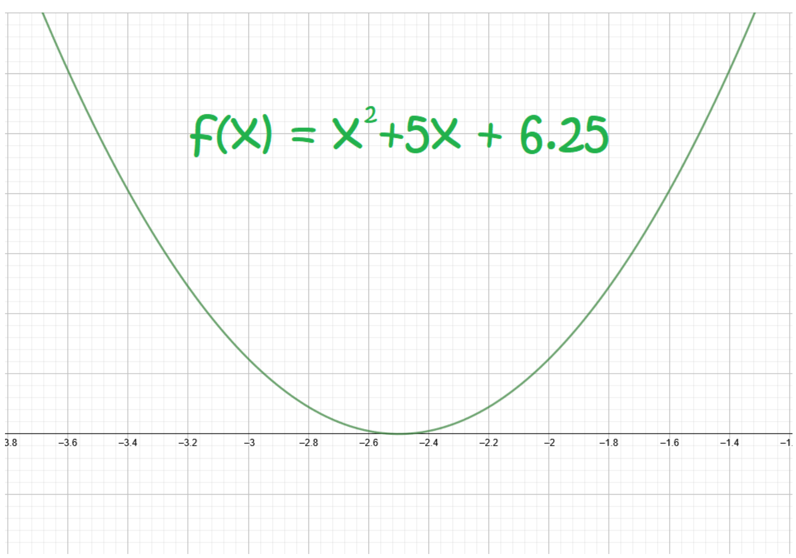




- Si $\Delta = 0$, alors $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$,

  Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 > 0$ sauf pour $x = -\dfrac{b}{2a}$ ou $x + \dfrac{b}{2a}$ s'annule.

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$		$+$	0	$+$	
$f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$		signe de a	0	signe de a	

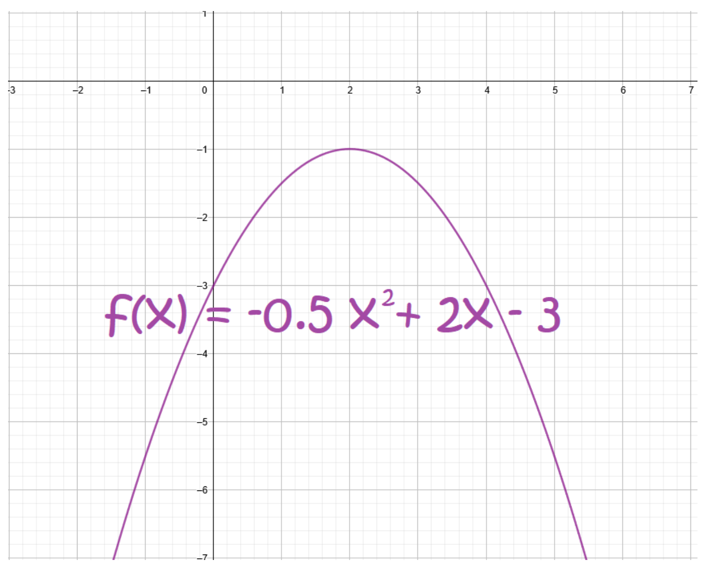


- Si $\Delta < 0$, alors $f(x) = a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{-\Delta}{4a^2}\right)$,

  Nous avons vu tout précédemment que pout tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{-\Delta}{4a^2} > 0$

  Donc f est du signe de a.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{-\Delta}{4a^2}$	$+$
$f(x) = a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{-\Delta}{4a^2}\right)$	signe de a



2.3 Variations

Pour étudier les variations de notre fonction, nous allons utiliser la forme générale,

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right)$$

Notons $X = x + \dfrac{b}{2a}$, nous savons que la fonction X^2 est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.
Or $X = 0 \iff x = -\dfrac{b}{2a}$.
Donc $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ est décroissante sur $]-\infty; -\dfrac{b}{2a}]$ et croissante sur $[-\dfrac{b}{2a}; +\infty[$.
Rajouter une constante à une fonction ne change pas le sens de variation,

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{-\Delta}{4a^2}$	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a^2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Ensuite en fonction du signe de a le sens de variation change:

- Si a positif, le sens de variation ne change pas,

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

- Si a négatif, le sens de variation est opposé,

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

Propriété: Une fonction polynôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet un extremum en $x = -\dfrac{b}{2a}$. Si a est positif cet extremum est un minimum, si a négatif cet extremum est un maximum.