Suites numériques
1ère

Sacha Darthenucq

Prérequis:

- **Vocabulaire ensembliste et logique (1ère)**

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition: Une suite est une fonction $u\begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u(n) \end{cases}$ avec $E \subset \mathbb{N}$ ou $E = \mathbb{N}$. C'est donc une fonction qui prend en entrée des entiers naturels.

Notations:

- L'image de n par u est noté $u(n)$ ou de manière beaucoup plus répandu, et c'est la notation que nous adopterons, u_n qui se lit "u indice n",
- La suite, correspondant à l'ensemble des images de la fonction u se note (u_n).

Définition: On dit qu'une suite (u_n) est définie de manière explicite lorsque l'on connait une fonction f telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

Remarque: On peut alors calculer facilement tous les termes de la suite.

Exemple: La suite $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, ..., $u_n = n^2$ est une suite définit de manière explicite. En effet en notant $f(x) = x^2$ on a bien $u_n = f(n)$.

Définition: On dit qu'une suite est définit par récurrence lorsque l'on connaît le premier terme de la suite, souvent u_0, et que l'on connaît une fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

Remarque: Grâce a la connaissance de u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ on peut calculer tous les termes de la suite puisque l'on connaît le premier terme et que chaque terme se déduit du précédent. Le calcul n'étant pas immédiat (contrairement à la forme explicite), il est commode d'utiliser des algorithmes pour le faire.

Exemple: $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n^2$, on a ainsi $u_1 = 4$, $u_2 = 16$, $u_3 = 256$ etc ...

1.2 Sens de variation

Définition: On dit qu'une suite (u_n) est croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.

Remarque: On dit aussi qu'une suite est croissante à partir du rang p si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \implies u_{n+1} \geq u_n$. Au début (avant le rang p) la suite fait ce qu'elle veut, puis à partir de p la suite est croissante.

Exemple: La suite définit par $u_n = n^2$ est croissante. En effet $(n+1)^2 > n$ car la fonction carrée est croissante, donc $u_{n+1} > u_n$.

Définition: On dit qu'une suite (u_n) est décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.

Exemple: La suite définit sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ par $u_n = \dfrac{1}{n}$ est décroissante. En effet $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ car la fonction inverse est décroissante.

Définition: On dit qu'une suite (u_n) est constante s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout n, $u_n = k$.

Exemple: La suite $u_n = 1$ est une suite constante.

Méthode: Pour calculer le sens de variation d'une suite on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$. S'il est positif, la suite est croissante, s'il est négatif la suite est décroissante et s'il est nul, la suite est constante.

Démo: $u_{n+1} \geq u_n \iff u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Propriété: Soit (u_n) une suite définie de manière explicite par $(u_n) = f(n)$. Alors

- f croissante $\implies$ (u_n) croissante,
- f décroissante $\implies$ (u_n) décroissante.

Démo: Montrons le pour la décroissance. f décroissante donc $x \geq y \implies f(x) \leq f(y)$.
$n+1 \geq n$ donc $f(n+1) \leq f(n)$ soit $u_{n+1} \leq u_n$, la suite (u_n) est décroissante.

Proposition: Soit (u_n) une suite de termes strictement positifs.

- (u_n) croissante $\iff \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$,
- (u_n) décroissante $\iff \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$,

Démo:

- (u_n) croissante $\iff u_{n+1} \geq u_n$ soit $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$; le sens de l'inégalité ne change pas car u_n positif,
- (u_n) décroissante $\iff u_{n+1} \leq u_n$ soit $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$.

Remarque: Attention, si la suite (u_n) est de termes strictement négatifs, la proposition est inversée car lors de la division par u_n dans la démonstration, le sens de l'inégalité change car $u_n < 0$.

1.3 Limite

Étudier la limite d'une suite revient à étudier le comportement de la suite à l'infini, c'est à dire quand n devient très grand, soit quand n tend vers l'infini (noté $n \to +\infty$).

Définition: On dit que la suite (u_n) admet une limite $l \in \mathbb{R}$ (éventuellement infinie), si quand n tend vers l'infini, u_n tend vers l.

Exemple: Soit la suite (u_n) définie par pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $(\mathbb{N}\ \{0\})$, $u_n = \dfrac{1}{n}$.
Quand n tend vers l'infini, $\dfrac{1}{n}$ tend vers 0, la limite de la suite (u_n) définie ci-dessus est donc 0.

Exemple: Soit la suite (u_n) définie par pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -n$.
Quand n tend vers l'infini, $-n$ tend vers $-\infty$, la limite de la suite (u_n) est donc $-\infty$.

Remarque: De nombreuses suites n'admettent pas de limite. Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ n'a aucune limite, ses valeurs oscillent entre -1 et 1.

2 Suites arithmétiques

2.1 Définition et calcul

Définition: Une suite (u_n) est dite arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout n tel que u_n soit définit, $u_{n+1} = u_n + r$. Le réel r est appelé la raison de la suite.

Exemple: Chez un vendeur de dvd, un abonnement, qui coûte 50 euros initialement, permet d'acheter tous les dvd à 3 euros.
Soit u_n la suite qui modélise le coût de l'achat de n dvd.
On a $u_{n+1} = u_n + 3$ avec $u_0 = 50$. La suite u_n représente une suite arithmétique.

Propriété: Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r définie à partir du rang p.
Alors $u_{p+n} = u_p + nr$.
En particulier si la suite est définie à partir du rang 0, on a $u_n = u_0 + nr$.

Démo: $u_{p+n} = u_{p+n-1} + r = u_{p+n-2} + r + r$ on dépile ainsi la suite et on obtient:
$u_{p+n} = u_p + \underbrace{r + ... + r}_{n fois} = u_p + nr$.

Exemple: Reprenons l'exemple précédent, le coût de n dvd vaut donc $u_n = u_0 + nr = 50 + 3n$.

2.2 Sens de variation

Propriété: Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$:

- (u_n) croissante $\iff r \geq 0$,
- (u_n) décroissante $\iff r \leq 0$.

Démo: $u_{n+1} = u_n + r$ donc $u_{n+1} - u_n = r$.

2.3 Calcul de la somme des premiers termes

Théorème: $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Remarque: Le symbole $\sum$ représente une somme. $\sum_{k=1}^{n} k$ se lit somme des k pour k variant de 1 à n. Quand varie de 1 à n, il varie par valeurs entières, c'est à dire qu'il prend successivement les valeurs 1, 2, 3, ..., $n-1$, n.

Démo: Notons S notre somme.
$S = 1 + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + ... + (n-1) + n$
$S = n + (n-1) + (n-2) + ... + \quad 2 \quad + 1$ on a écrit la somme à l'envers.
En additionnant les deux sommes on remarque:
$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + ... + (n+1) + (n+1)}_{n fois}$
$2S = n(n+1)$ d'où $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Méthode: Calcul de la somme des termes d'une suite arithmétique.
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Calculons la somme des termes de u_p, u_{p+1}, ..., u_{p+n}:

$$\begin{aligned} u_p + u_{p+1} + ... + u_n &= u_p + (u_p + 1r) + (u_p + 2r) + ... + (u_p + nr) \\ &= (n+1)u_p + r(1 + 2 + ... + n) \\ u_p + u_{p+1} + ... + u_n &= (n+1)u_p + r\frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Remarque: Le résultat n'est pas à connaître, mais la méthode doit savoir être reproduite.

3 Suites géométriques

3.1 Définition et calcul

Définition: Une suite (un) est dite arithmétique si il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout n tel que u_n soit définit, $u_{n+1} = q \times u_n$. Le réel q est appelé la raison de la suite.

Exemple: J'effectue un placement de 1 000 euros dont le taux de rendement est de 4.5% par an. L'argent que je gagne grâce au placement est automatiquement ajouté à l'argent déjà placé.
Soit (u_n) la suite qui modélise l'argent sur le placement au début de la n^{ieme} année.
On a donc $u_{n+1} = 1.045 \times u_n$ et $u_0 = 1000$. La suite (u_n) est donc une suite géométrique.

Propriété: Soit (u_n) une suite géométrique de raison q définie à partir du rang p.
Alors $u_{p+n} = u_p \times q^n$.
En particulier si la suite est définie à partir du rang 0, on a $u_n = u_0 \times q^n$.

Démo: $u_{p+n} = u_{p+n-1} \times q = u_{p+n-2} \times q \times q$ on dépile ainsi la suite et on obtient:
$u_{p+n} = u_p \times \underbrace{p \times ... \times p}_{n fois} = u_p \times q^n$.

Exemple: Reprenons l'exemple précédent, au bout de n ans j'ai $u_n = 1000 \times (1.045)^n$ euros sur mon placement.

3.2 Sens de variation et limite

Propriété: Soit (u_n) une suite géométriques, à termes strictement positifs, de raison $q \in \mathbb{R}$:

- (u_n) croissante $\iff q \geq 1$,
- (u_n) décroissante $\iff q \leq 1$.

Démo: (u_n) suite de termes strictement positifs donc: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \iff (u_n)$ croissante.
$u_{n+1} = u_n \times q$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$.

Proposition: Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Si $q > 1$ alors la limite de la suite est infinie.

Démo: Pour $q > 1$ on a q^n qui tend vers l'infini quand n tend vers l'infini. Si le premier terme u_p de la suite est positif la suite tend vers $+\infty$, s'il est négatif la suite tend vers $-\infty$.

3.3 Calcul de la somme des premiers termes

Théorème: Pour tout $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + ... + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Démo:
$$\begin{aligned}
(1-q) \times (1 + q + q^2 + ... + q^n) &= 1 \times (1 + q + q^2 + ... + q^n) \\
&\quad -q \times (1 + q + q^2 + ... + q^n) \\
&= 1 + q + q^2 + ... + q^n \\
&\quad -q - q^2 - ... - q^n - q^{n+1} \\
(1-q) \times (1 + q + q^2 + ... + q^n) &= 1 - q^{n+1}
\end{aligned}$$

D'où pour $q \neq 1$ on a $(1 + q + q^2 + ... + q^n) = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Méthode: Calcul de la somme des termes d'une suite géométrique.
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
Calculons la somme des termes de u_p, u_{p+1}, ..., u_{p+n}:

$$\begin{aligned}
u_p + u_{p+1} + ... + u_n &= u_p + (u_p \times q) + (u_p \times q^2) + ... + (u_p \times q^n) \\
&= u_p \times (1 + q + q^2 + ... + q^n) \\
u_p + u_{p+1} + ... + u_n &= u_p \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}
\end{aligned}$$

Remarque: Le résultat n'est pas à connaître, mais la méthode doit savoir être reproduite.