Dérivation
1ère

Sacha Darthenucq

Prérequis:

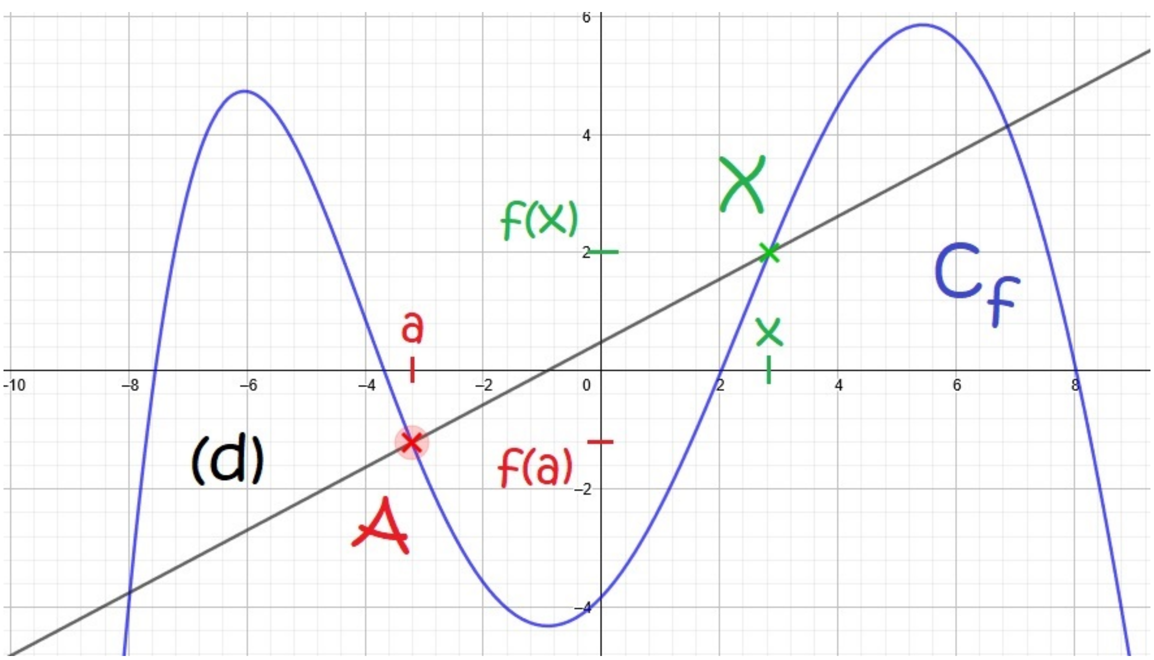
- **Vocabulaire ensembliste et logique (1ère)**

1 Point de vue local

1.1 Taux de variation

Définition: Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathcal{I}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $a \in \mathcal{I}$. On appelle taux de variation de f entre a et x (ou taux de variation de f en a calculé en x) la fonction définie sur $\mathcal{I} \setminus \{a\}$ par $T_a f(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Remarque: Le taux de variation de f entre a et x correspond à la pente (coefficient directeur) de la droite (d) de vecteur directeur $\overrightarrow{AX}$ avec $A(a; f(a))$ et $X(x; f(x))$.



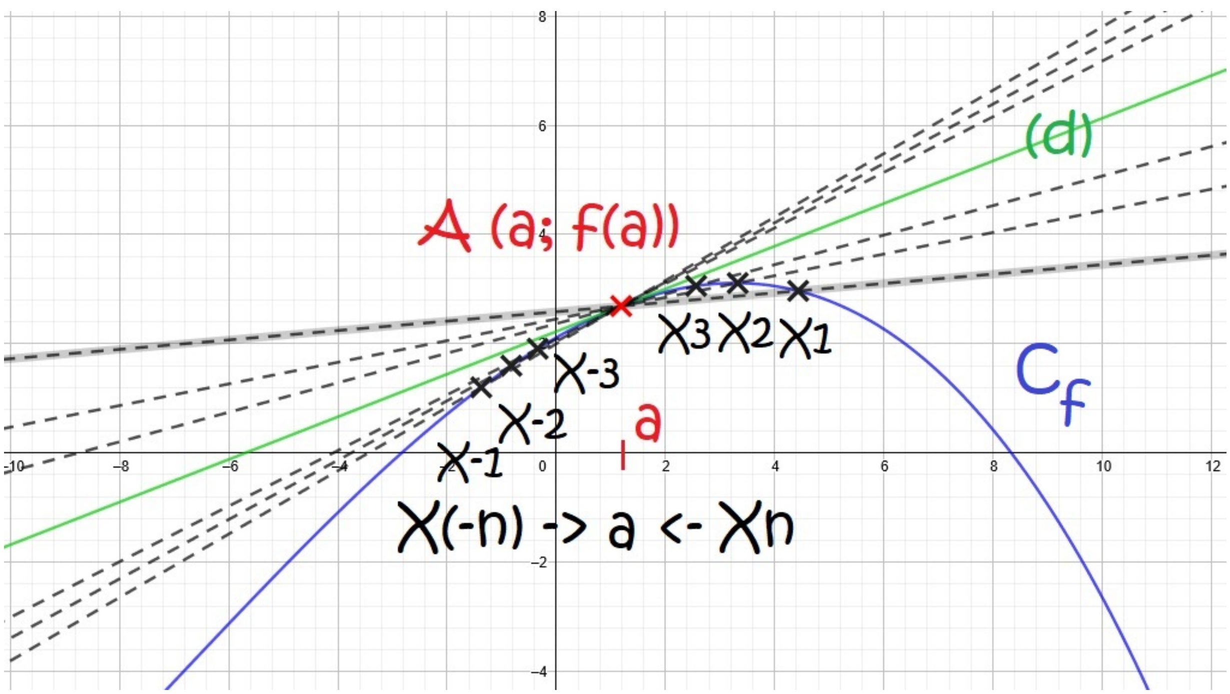
Définition: Si le taux de variation de f en a calculé en x admet une limite **finie** lorsque x tend vers a, alors on dit que f est dérivable en a de nombre dérivée $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} T_a f(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Remarque: L'existence de $f'(a)$ n'est à priori pas immédiate. En effet $\lim_{x\to a} \frac{1}{x-a} = \infty$, il faut donc que $\lim_{x\to a} f(x) - f(a)$ tende rapidement vers 0 pour compenser la tendance infinie de $\frac{1}{x-a}$.

Méthode: Pour calculer une dérivée comme $x \to a$, on note $x = a + h$ avec $h \to 0$. Calculer $T_a f(x)$ quand x tend vers a revient donc à calculer $T_a f(a+h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ quand h tend vers 0 ce qui est beaucoup plus commode.

1.2 Tangente

Interprétation graphique: Quand x tend vers a, le point $X(x, f(x))$ se rapproche de $A(a; f(a))$. Si la fonction f est dérivable en a, $f'(a) = \lim_{x\to a} T_a f(x)$ existe. La tangente en $A(a; f(a))$ correspond à la droite "limite", dont la pente est égale à $f'(a)$.
Sur le schéma ci-dessous, la droite (d), qui est la tangente, est la limite des droites (d_n) de vecteurs directeurs $\overrightarrow{AX_n}$ quand $X_n \to A$ (c'est à dire $x_n \to a$).



Définition: Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathcal{I}$, $a \in \mathcal{I}$ tel que f dérivable en a. La tangente de f en a est la droite passant par le point $A(a; f(a))$ de coefficient directeur $f'(a)$.
Dans ce cas l'équation de la tangente est $t_a : y = (x-a)f'(a) + f(a)$.

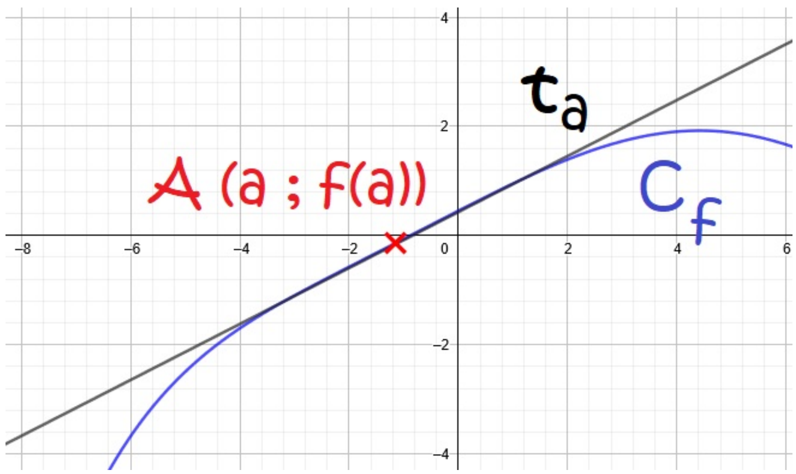
Démo: La tangente au point a notée t_a est une droite, son équation est de la forme $y = mx + p$ avec $m, p \in \mathbb{R}$. De plus son coefficient directeur vaut $f'(a)$ donc $p = f'(a)$.
On a donc $t_a : y = f'(a)\ x + p$.
Or $A(a; f(a)) \in t_a$, d'où $f(a) = f'(a) \times a + p$
Soit $p = f(a) - af'(a)$
D'où $t_a : y = f'(a)x + f(a) - af'(a) = (x-a)f'(a) + f(a)$.

2 Calcul de dérivées

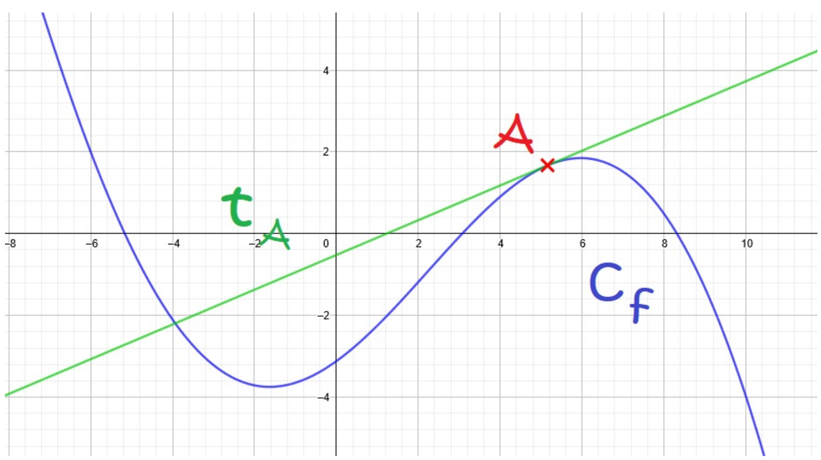
2.1 Calcul graphique

On peut calculer graphiquement la dérivée d'une fonction en un point en traçant la tangente en ce point et en calculant graphiquement son coefficient directeur, on obtient la dérivée en ce point. Mais n'a-t-on pas besoin de la dérivée en un point pour tracer la tangente?

- Si le point a se situe sur un segment de droite, alors la tangente en $A(a; f(a))$ correspond à la droite qui contient le segment de droite sur lequel se trouve a, illustration:



- Si le point a ne se situe pas sur un segment de droite, alors la tangente en $A(a; f(a))$ ne coupe "localement" (c'est à dire autour du point A) aucun autre point de la courbe représentative de f notée $\mathcal{C}_f$. En utilisant cette propriété à vous de tracer la tangente ;) illustration:



Remarque: Bien sûr ce tracé est approximatif mais donne déjà une bonne approximation de $f'(a)$.

Remarque: Souvent on vous donne déjà le tracé de la tangente et il vous suffit de calculer son coefficient directeur.

2.2 Dérivation des fonctions usuelles

Définition: On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle $\mathcal{I}$, si f est dérivable en tout point de I c'est à dire que pour tout $x \in \mathcal{I}$, $f'(x)$ existe. Dans ce cas on note f' sa fonction dérivée, qui à tout $x \in \mathcal{I}$ associe $f'(x)$.

Nous étendons donc la définition locale de la dérivée en une définition globale qui nous permet de calculer des fonctions dérivées.

2.2.1 Polynômes

Théorème: Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$ une constante. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$.

Démo: $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{k-k}{h} = 0$, donc $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$.

Théorème: Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1$.

Démo: $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{x+h-x}{h} = \dfrac{h}{h} = 1$, donc $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = 1$.

Théorème: Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.

Démo: $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h} = \dfrac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = 2x+h$.
Donc $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 2x+h = 2x$.

Théorème: Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$, (si $n < 0$ alors f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$). Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} \setminus \{0\}$ si $n < 0$) et $f'(x) = nx^{n-1}$.

2.2.2 Inverse

Théorème: Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Remarque: La fonction inverse n'est pas définit en 0 donc elle n'est pas dérivable en 0.

Démo: $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \dfrac{\dfrac{x}{(x+h)x} - \dfrac{x+h}{x(x+h)}}{h} = \dfrac{\dfrac{-h}{x(x+h)}}{h} = -\dfrac{1}{x(x+h)}$.
Donc $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} -\dfrac{1}{x(x+h)} = -\dfrac{1}{x^2}$.

2.2.3 Racine carrée

Théorème: Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ (les réels positifs) par $f(x) = \sqrt{x}$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Démo: $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$.
Méthode essentiel: on multiplie par la quantité conjuguée pour simplifier les racines au numérateur.
$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \times \dfrac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \dfrac{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \dfrac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$.
Soit $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$.
On n'est plus embêté par les racines car il y a un plus entre elles donc en passant à la limite on a aucun problème.
Donc $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
En 0 il y a évidemment problème car $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$, donc ala fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

2.3 Opération sur les dérivées

2.3.1 Somme

Théorème: Soit f et g deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle $\mathcal{I}$. Alors pour tout $x \in \mathcal{I}$, $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$, c'est à dire $(f+g)' = f' + g'$.

Démo:
$\dfrac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} = \dfrac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$.

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) + \lim_{h\to 0}\left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\end{aligned}$$

$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Remarque: Pour toute constante k, on a $(f+k)' = f' + k' = f' + 0 = f'$.

2.3.2 Produit

Théorème: Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $\mathcal{I}$, alors λf est dérivable sur $\mathcal{I}$ et pour tout $x \in \mathcal{I}$, $(\lambda f)'(x) = \lambda \times f'(x)$, c'est à dire $(\lambda f)' = \lambda f'$.

Démo: $\dfrac{(\lambda f)(x+h) - (\lambda f)(x)}{h} = \dfrac{\lambda f(x+h) - \lambda f(x)}{h} = \lambda \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.
Donc $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \left(\lambda \, \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) = \lambda \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lambda f'(x)$.

Théorème: Soit f, g deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle $\mathcal{I}$, alors $f \times g$ est dérivable sur $\mathcal{I}$ et pour tout $x \in \mathcal{I}$, $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, c'est à dire $(fg)' = f'g + g'f$.

Démo:
$$\begin{aligned}
\frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\
&= f(x+h) \times \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \times \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
\lim_{h \to 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} &= f(x) \times \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \times \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
(fg)'(x) &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x).
\end{aligned}$$

2.3.3 Quotient

Théorème: Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $\mathcal{I}$ telle que pour tout $x \in \mathcal{I}$, $f(x) \neq 0$. Alors $\dfrac{1}{f}$ est définie est dérivable sur $\mathcal{I}$ et $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$.

Démo: $\dfrac{\dfrac{1}{f(x+h)} - \dfrac{1}{f(x)}}{h} = \dfrac{\dfrac{f(x) - f(x+h)}{f(x)f(x+h)}}{h} = -\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \times \dfrac{1}{f(x)f(x+h)}$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{f}\right)'(x) &= \lim_{h \to 0} \; -\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \times \frac{1}{f(x)f(x+h)} \\
&= -\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \times \lim_{h \to 0} \frac{1}{f(x)f(x+h)}
\end{aligned}$$
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -f'(x)\frac{1}{f^2(x)}.$$

Théorème: Soit f et g deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle $\mathcal{I}$ telles que pour tout $x \in \mathcal{I}$, $g(x) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est défnie est dérivable sur $\mathcal{I}$ et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$.

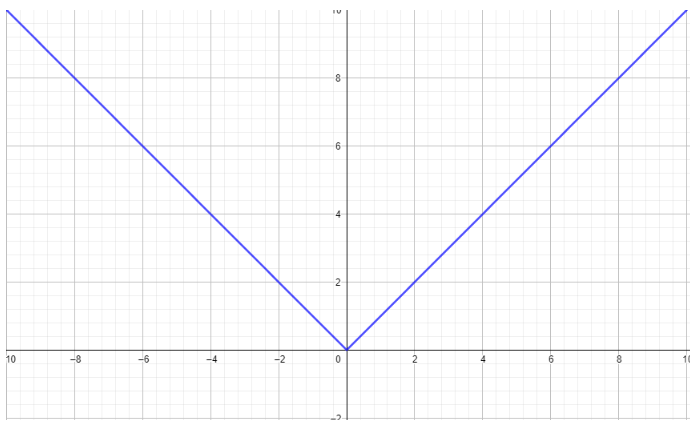
Démo: $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = f' \times \dfrac{1}{g} + \left(\dfrac{1}{g}\right)' \times f = \dfrac{f'}{g} - \dfrac{g'}{g^2} f = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$.

2.3.4 Composée

Théorème: Soit $a, b \in \mathbb{R}$, soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathcal{I}$ intervalle. Soit $\mathcal{J}$ intervalle telle que pour tout $x \in \mathcal{J}$, $ax+b \in \mathcal{I}$. Alors $f(ax+b)$ est définie et dérivable sur $\mathcal{J}$ et $f(ax+b)' = af'(ax+b)$.

2.4 Étude: fonction valeur absolue

Définition: On définit la fonction valeur absolue, notée $|\ |$, sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} |x| = x \text{ si } x \geq 0 \\ |x| = -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$.



Proposition: La fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Démo:

- Soit $x > 0$, $|x| = x$ et quand h tend vers 0 $x+h > 0$, d'où $|x+h| = x+h$
  $|x|' = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x+h-x}{h} = 1.$
- Soit $x < 0$, $|x| = -x$ et quand h tend vers 0 $x+h < 0$ d'où $|x+h| = -x-h$
  $|x|' = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-x-h-(-x)}{h} = -1$

Nous aurions aussi directement déterminer graphiquement les dérivées.
$|x|$ est donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
En 0:

- Si $h > 0$, $|h| = h$, donc $\lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} \dfrac{|0+h|-|0|}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} \dfrac{h}{h} = 1$
- Si $h < 0$, $|h| = -h$, donc $\lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ h<0}} \dfrac{|0+h|-|0|}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ h<0}} \dfrac{-h}{h} = -1$

Nous obtenons 2 valeurs distinctes pour la dérivée, en fonction de si h tend vers 0 par valeurs négatives ou positives, donc le nombre dérivé de $|\ |$ en 0 n'existe pas, $|\ |$ n'est pas dérivable en 0.

3 Propriétés fondamentales

Le principe de cette partie est d'étendre la notion de dérivée en un point, qui est une notion locale en une notion globale. Nous avons déjà vu la dérivabilité

3.1 Sens de variation

Théorème: Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathcal{I}$ intervalle de fonction dérivée f'. f' est positive sur $\mathcal{I}$, c'est à dire que pour tout $x \in \mathcal{I}$, $f'(x) \geq 0$, ssi f est croissante sur $\mathcal{I}$.

Remarque: f' est strictement positive $\iff$ f est strictement croissante.

Démo: Nous allons ici tenter d'expliquer assez simplement pourquoi ce théorème est vrai.
Si f' **positive:**
Prenons un point $a \in \mathcal{I}$, $f'(a) \geq 0$.
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0$.
Quand h est suffisamment proche de 0, on a $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0$.

- Si $h > 0$, alors $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0 \iff f(a+h)-f(a) \geq 0 \iff f(a+h) \geq f(a)$.
  Or $a+h \geq a$, on a donc pour b proche de a en étant plus grand, $b = a+h$ avec $h > 0$,
  $b \geq a \implies f(b) \geq f(a)$.
- Si $h < 0$, alors $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0 \iff f(a+h)-f(a) \leq 0 \iff f(a+h) \leq f(a)$.
  Or $a+h \leq a$, on a donc pour b proche de a en étant plus petit, $b = a+h$ avec $h < 0$,
  $b \leq a \implies f(b) \leq f(a)$.

Nous avons donc montré que la fonction f est croissante autour du point a, mais comme cela est vrai pour tous les points de $\mathcal{I}$, cela est vrai sur tout l'intervalle $\mathcal{I}$, donc f croissante sur $\mathcal{I}$.
Nous avons montré "f' positive $\implies$ f croissante".
Si f **croissante:**
Nous allons raisonner de la même manière:

- Si $h > 0$, alors $a+h > a$ donc $f(a+h) \geq f(a)$ soit $f(a+h)-f(a) \geq 0$
  Donc $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0$ en passant a la limite on garde le caractère positif,
  $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0$.
- Si $h < 0$, alors $a+h < a$ donc $f(a+h) \leq f(a)$ soit $f(a+h)-f(a) \leq 0$
  Donc $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0$ en passant a la limite on garde le caractère positif,
  $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0$.

Nous avons donc montré "f croissante $\implies$ f' positive". D'où "f croissante $\iff$ f' positive".

Théorème: Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathcal{I}$ intervalle de fonction dérivée f'.
f' est négative sur $\mathcal{I}$, ssi f est décroissante sur $\mathcal{I}$.

Démo: De même que précédemment.

Théorème: Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathcal{I}$ intervalle de fonction dérivée f'.
f constante ssi $f' = 0$ (c'est à dire pour tout $x \in \mathcal{I}$, $f'(x) = 0$).

Démo: De même que précédemment.

3.2 Extremum

Définition: Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathcal{I}$, soit $a \in \mathcal{I}$. On dit que f admet un maximum en a ssi pour tout $x \in \mathcal{I}$, $f(x) \leq f(a)$.

Définition: Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathcal{I}$, soit $a \in \mathcal{I}$. On dit que f admet un minimum en a ssi pour tout $x \in \mathcal{I}$, $f(x) \geq f(a)$.

Définition: On appelle extremum d'une fonction un minimum ou un maximum.

Proposition: Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathcal{I}$ intervalle. Si f admet un extremum en a, alors $f'(a) = 0$.

Démo: Supposons que f admette un maximum en a.

- Soit $h > 0$, $f(a+h) \geq f(a)$ car a maximum, $f(a+h) - f(a) \leq 0$.
  $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0$, donc $f'(a) \leq 0$.
- Soit $h < 0$, $f(a+h) \geq f(a)$ car a maximum, $f(a+h) - f(a) \leq 0$.
  $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0$, donc $f'(a) \geq 0$.

Nous avons donc à la fois $f'(a) \geq 0$ et $f'(a) \leq 0$, donc $f'(a) = 0$. De même si a est un minimum.

Remarque: Attention il n'y a pas équivalence ! En effet $f'(a) = 0$ n'implique pas a extremum, (fonction x^3 en 0).