Fonction exponentielle
1ère

Sacha Darthenucq

Prérequis:

- **Vocabulaire ensembliste et logique (1ère)**
- **Dérivation (1ère)**

1 Généralités

1.1 Définition

Théorème: Toute fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = f$ et $f' = f$ ne s'annule jamais.

Démo: Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)f(-x)$, alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
$g'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)(f(-x))' = f(x)f(-x) - f(x)f'(-x) = f(x)f(-x) - f(x)f(x) = 0$.
g est donc une fonction constante et comme $g(0) = f(0)f(-0) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 1$.
Si f s'annulait en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors on aurait $g(x_0) = f(x_0)f(-x_0) = 0$ ce qui est impossible.
Donc f ne s'annule jamais.

Théorème: Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 1$ et $f' = f$. Cette fonction est appelée exponentielle notée $\exp(x)$.

Démo: Nous devons démontrer l'unicité de cette fonction.
Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe au moins 2 fonctions f et g telles que $f(0) = 1$, $g(0) = 1$ et $f' = f$, $g' = g$.
$\frac{f}{g}$ est licite car nous avons montré avec la proposition précédente que g ne s'annule jamais.
$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} = \frac{fg - gf}{g^2} = 0$.
Donc $\frac{f}{g}$ est une fonction constante et comme $\left(\frac{f}{g}\right)(0) = 1$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$ soit $f(x) = g(x)$.
La fonction f est donc unique.

1.2 Propriétés

Propriété: Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

Démo: Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Étudions la fonction $f(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$, licite car $\exp(x)$ ne s'annule jamais.
$f'(x) = \dfrac{(\exp(x+y))' \exp(x) - \exp'(x)\exp(x+y)}{\exp(x)^2} = \dfrac{\exp'(x+y)\exp(x) - \exp(x)\exp(x+y)}{\exp(x)^2} = 0.$
f est donc constante sur $\mathbb{R}$ et puisque $f(0) = \exp(y)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$f(x) = \exp(y)$ soit $\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$.
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.
Ce raisonnement marche quelque soit $y \in \mathbb{R}$ d'où pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

Conséquence: Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x)^n = \exp(nx)$.

Propriété: Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

Démo:
$$\begin{aligned}(\exp(x)\exp(-x))' &= \exp'(x)\exp(-x) + \exp(x)(\exp(-x))' \\ &= \exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp'(-x) \\ &= 0.\end{aligned}$$
La fonction $(\exp(x)\exp(-x))$ est donc constante sur $\mathbb{R}$ et comme $\exp(0)\exp(-0) = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x)\exp(-x) = 1$.
Donc $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

Remarque: La fonction exponentielle se comporte comme une fonction puissance, $\exp(0) = 1$, $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ et $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ on la note donc dorénavant e^x, $\exp(x) = e^x$.
Ainsi:

$$\begin{array}{ll} e^0 = 1 & \qquad e^{a+b} = e^a \times a^b \\ e^{na} = (e^a)^n & \qquad e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}. \end{array}$$

2 Étude

Théorème: La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démo: $\exp' = \exp$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, donc $\exp'(x) > 0$, la fonction exp est donc strictement croissante.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp(x) = exp'(x)$		$+$	
$\exp(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 1 $\nearrow$	$+\infty$