Produit scalaire
1ère

Sacha Darthenucq

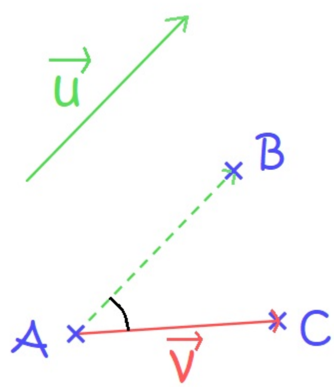
Prérequis:

- **Vocabulaire ensembliste et logique (1ère)**
- **Fonctions trigonométriques (1ère)**

1 Produit scalaire dans le plan

1.1 Définition

Définition: Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Alors nous appelons produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le **réel** $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$. Il se lit $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$.



Remarque: Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$, attention la réciproque est fausse !

Propriété: $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}.\vec{u}$

Démo: $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{u}) = \|\vec{u}\|^2 \times \cos(0) = \|\vec{u}\|^2$.

Propriété: Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont:

- colinéaires de même sens, alors $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$,
- colinéaires de sens contraires, alors $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$,

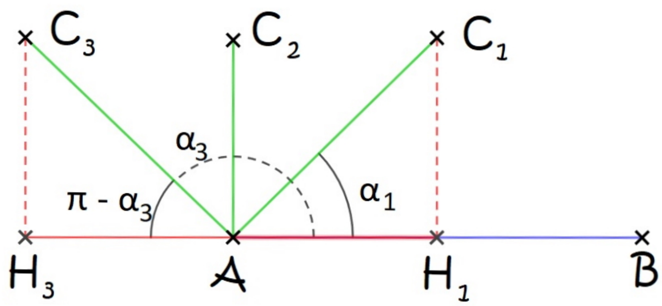
Démo:

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de même sens $\implies \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(0) = 1$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de sens contraires $\implies \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(\pm\pi) = -1$

1.2 Projection orthogonale

Propriété: Soit A, B, C trois points. Notons H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \pm \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AH}\right\|$.

Démo: Distinguons 3 cas:



- Pour $C = C_1$, alors, dans le triangle rectangle AH_1C_1, nous avons $\cos(\alpha_1) = \dfrac{AH_1}{AC_1}$ soit $AC_1 \times \cos(\alpha_1) = AH_1$.
  Ainsi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC_1} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC_1}\right\| \cos(\alpha_1) = AB \times AC_1 \times cos(\alpha_1) = AB \times AH_1 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH_1}$.

- Pour $C = C_2$, alors, $H_2 = A$ et $\alpha_2 = \dfrac{\pi}{2}$.
  Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC_2}\right\| \cos(\dfrac{\pi}{2}) = 0$ car $\cos(\dfrac{\pi}{2}) = 0$,
  et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH_2} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AB}.\vec{0} = 0$.
  Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC_2} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH_2}$.

- Pour $C = C_3$, alors dans le triangle rectangle AH_3C_3, nous avons $\cos(\pi - \alpha_3) = \dfrac{AH_3}{AC_3}$ soit $AC_3 \times \cos(\pi - \alpha_3) = AH_3$. De plus $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ donc $AC_3 \times \cos(\alpha_3) = -AH_3$.
  Ainsi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC_3} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC_3}\right\| \cos(\alpha_3) = AB \times AC_3 \times cos(\alpha_3) = -AB \times AH_3 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH_3}$.

Par disjonction de cas nous obtenons bien $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$.

1.3 Propriétés

Propriété: Symétrie
Le produit scalaire est symétrique, c'est à dire que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

Démo: On sait que $cos(-x) = cos(x)$.
Donc $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(-(\vec{v}, \vec{u})) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{v}, \vec{u}) = \vec{v}.\vec{u}$

Propriété: Bilinéarité
Le produit scalaire est bilinéaire, c'est à dire que:

- Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{w} + \vec{x}) = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w} + \vec{u}.\vec{x} + \vec{v}.\vec{x}$,
- Pour tous réels k, k', $(k\vec{u}).(k'\vec{v}) = kk' \times (\vec{u}.\vec{v})$

Démo: Admises.

2 Produit scalaire et orthogonalité

2.1 Orthogonalité

Définition: Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux ssi $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Remarque: Le vecteur nul, $\vec{0}$, est orthogonal à tout vecteur.

Propriété: Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de direction les droites (d_u) et (d_v).
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\iff$ les droites (d_u) et (d_v) sont perpendiculaires.

Démo:

- Si $\vec{u}.\vec{v} = 0$, alors $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v}) = 0$ donc $cos(\vec{u},\vec{v}) = 0$.
  Donc les directions des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires.
- Si les directions des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires, alors $cos(\vec{u},\vec{v}) = 0$.
  Donc $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v}) = 0$.

2.2 Produit scalaire en base orthonormée

Définition: Une base du plan $(\vec{i},\vec{j})$ est dite orthonormée ssi $\|\vec{i}\| = 1$, $\|\vec{j}\| = 1$ et $\vec{i}.\vec{j} = 0$.

Théorème: Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dont les coordonnées dans une base orthonormée sont $(x;y)$ et $(x';y')$. Alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

Démo: $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ avec $(\vec{i},\vec{j})$ base orthonormée.
$\vec{u}.\vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}).(x'\vec{i} + y'\vec{j}) = xx'(\vec{i}.\vec{i}) + xy'(\vec{i}.\vec{j}) + yx'(\vec{j}.\vec{i}) + yy'(\vec{j}.\vec{j})$ par bilinéarité.
Or $\vec{j}.\vec{i} = 0$
$\vec{u}.\vec{v} = xx'\|\vec{i}\|^2 + yy'\|\vec{j}\|^2$ et $\|\vec{i}\| = 1 = \|\vec{j}\|$.
$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

3 Applications

3.1 Développement de $\|.\|^2$

Proposition: $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

Démo: $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v}$ par bilinéarité.
Or $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ par symétrie, et $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

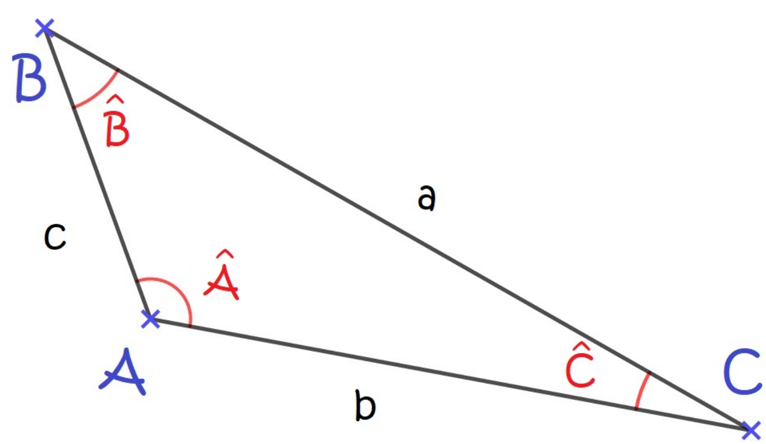
Proposition: $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

Démo: De même.

Proposition: $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Démo: De même.

3.2 Formule d'Al-Kashi



Théorème: Pour tout triangle A, B, C:

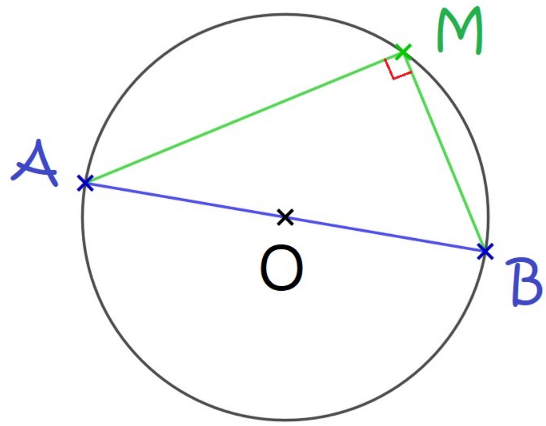
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$,
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\hat{B})$,
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\hat{C})$.

Démo: $a^2 = BC^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2$. Or $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.
Donc $\|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{AC}\| - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \|\overrightarrow{BC}\|^2 = c^2 - 2cb\cos(\hat{A}) + b^2$.
Ainsi $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$.
De même pour les autres résultats.

3.3 Étude de $\vec{MA}.\vec{MB} = 0$

Proposition: Soit A, B deux points distincts du plan, notons $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$, soit M un point du plan. $M \in \mathscr{C} \iff \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

Démo:



$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})$
$= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA})$.
$= \|\overrightarrow{MO}\|^2 + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA} + \|\overrightarrow{OA}\|^2$
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - OA^2$.
Donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \iff MO = OA$, c'est à dire M appartient au cercle de centre O et de rayon OA, donc au cercle de diamètre $[AB]$.

Conséquence: Pour tout point M du cercle de diamètre $[AB]$, le triangle AMB est rectangle en M.