Probabilités conditionnelles
1ère

Sacha Darthenucq

Prérequis:

- **Vocabulaire ensembliste et logique (1ère)**

1 Probabilité conditionnelle

1.1 Généralités

Définition: Soit A et B deux évènements, A de probabilité non nulle. Nous appelons probabilités de B sachant A, la probabilité que l'évènement B soit réalisé, sachant que l'évènement A a déjà été réalisé. Elle est notée $\mathbb{P}_A(B)$ et vaut $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$.

Exemple: Soit une classe, dont 80% des élèves pratiquent une activité extra-scolaire, dont 60% pratiquent un sport et dont 40% pratiquent au moins un sport et une activité extra-scolaire.
Notons A : "l'élève pratique une activité", B : "l'élève pratique un sport", nous avons:
$\mathbb{P}(A) = 0.8$, $\mathbb{P}(B) = 0.6$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.4$.
La probabilité qu'un élève pratique un sport, sachant qu'il pratique une activité est donc:
$\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{0.4}{0.8} = 0.5$.

Conséquence: Soit A et B deux évènements, A de probabilité non nulle. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)$.

Proposition: Soit A et B deux évènements, A de probabilité non nulle. Alors $\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(\bar{B}) = 1$.

Démo: $\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(\bar{B}) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} + \dfrac{\mathbb{P}(A \cap \bar{B})}{\mathbb{P}(A)}$ or $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A)$.
Donc $\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(\bar{B}) = \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$.

1.2 Indépendance

Définition: Deux évènements A et B de probabilité non nulle sont dits indépendants ssi $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$ ce qui équivaut aussi à $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.

Exemple: Lors de deux lancers de dé à 6 faces, considérons les évènements A : "j'obtiens un 4 au premier lancé de dé" et B : "j'obtiens un 6 au deuxième lancer de dé".
Nous conviendrons aisément que le résultat du premier jet de dé n'influe pas sur le résultat du

second jet de dé, les évènements sont donc indépendants, et en effet:
$\mathbb{P}_A(B) = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(B)$.

Proposition: Deux évènements A sont B indépendants ssi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Démo: A et B indépendants $\iff \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A) \iff \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B) \iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$

1.3 Formule des probabilités totales

Définition: Nous appelons partition de l'univers, ou système complet d'évènements, Ω tout famille finie d'évènements $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que pour $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ (famille d'évènements incompatibles), et telle que $A_1 \cup ... \cup A_n = \Omega$.

Remarque: En particulier, pour tout évènement A de Ω, $(A, \bar{A})$ forme une partition de Ω.

Exemple: Pour un lancer de pièce, les évènements S_p : "j'obtiens pile" et S_f : "j'obtiens face" forment une partition de l'univers.

Théorème: Pour tout évènement B de Ω, pour toute partition $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ de Ω,
$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + ... + \mathbb{P}(B \cap A_n)$.

Proposition: Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une partition de l'univers Ω. Soit B un évènement de l'univers Ω, alors $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(B) + ... + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B)$.

Démo: $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + ... + \mathbb{P}(B \cap A_n)$ et $\mathbb{P}(B \cap A_i) = \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)$.

2 Représentations

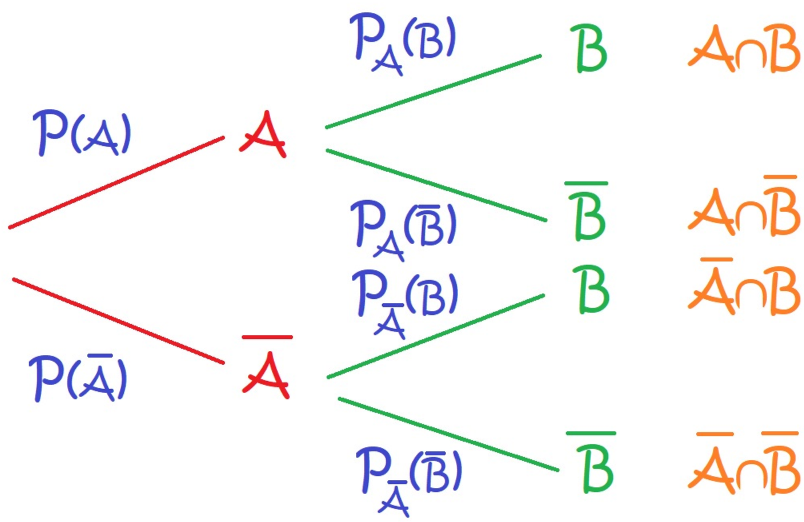
2.1 Tableau

	B	$\bar{B}$	Total
A	$\mathbb{P}(A \cap B)$	$\mathbb{P}(A \cap \bar{B})$	$\mathbb{P}(A)$
$\bar{A}$	$\mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$	$\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B})$	$\mathbb{P}(\bar{A})$
Total	$\mathbb{P}(B)$	$\mathbb{P}(\bar{B})$	1

Nous pouvons modéliser une expérience aléatoire mettant successivement en jeu les évènements A et B par un tableau a double entrée comme représenté ci-dessus. Nous pouvons avoir au lieu de A et $\bar{A}$ (ou B et $\bar{B}$) des évènements $A_1, ...A_n$ formant une partition de l'univers.

2.2 Arbre pondéré

Nous pouvons modéliser une expérience aléatoire mettant successivement en jeu les évènements A et B par un arbre pondéré comme représenté ci-dessous. Bien sûr l'arbre peut être plus grand avec des évènements C, D etc... en plus. De même nous pouvons avoir au lieu de A et $\bar{A}$ (ou B et $\bar{B}$) des évènements $A_1, ...A_n$ formant une partition de l'univers.



Proposition:

- La probabilité d'un chemin correspond au produit des probabilités rencontrées sur les branches de ce chemin,
- La probabilité d'un évènement correspond à la somme des probabilités de tous les chemins aboutissant à cet évènement.

Démo: Par principe de construction de notre arbre.