Variables aléatoires
1ère

Sacha Darthenucq

Prérequis:

- **Vocabulaire ensembliste et logique (1ère)**

Nous considérons dans ce chapitre une expérience aléatoire d'univers Ω.

1 Variable aléatoire réelle

1.1 Définition

Définition: Une variable aléatoire réelle est une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Exemple: Pour le lancer d'un dé à six faces, nous pouvons définir une variable aléatoire X qui indique le chiffre présent sur la face du dé. Ainsi en considérant l'issue I_4: "j'obtiens 4", nous avons $X(I_4) = 4$.

1.2 Évènement

Définition: Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω, a l'une des valeurs prises par X.

- L'évènement $\{X = a\}$ correspond à l'ensemble des issues auxquelles nous associons par X le réel a,
- L'évènement $\{X \leq a\}$ correspond à l'ensemble des issues auxquelles nous associons par X un réel supérieur ou égal à a.

Remarque: Nous définissons de même les évènements $\{X < a\}$, $\{X \geq a\}$ et $\{X > a\}$.

1.3 Loi de probabilité

Notations:

- La probabilité de l'évènement $\{X = a\}$ se note $\mathbb{P}(X = a)$,
- La probabilité de l'évènement $\{X \leq a\}$ se note $\mathbb{P}(X \leq a)$,

Remarque: De même pour les évènements $\{X < a\}$, $\{X \geq a\}$ et $\{X > a\}$.

Définition: Soit X une variable définie sur Ω, notons x_i les différentes valeurs prises par X sur Ω. La loi de probabilité de X est la donnée des $\mathbb{P}(X = x_i)$, pour chaque x_i valeur prise par X.

Exemple: Considérons le lancé d'un dé à six faces, X la variable qui donne le chiffre obtenu lors du lancer du dé. $X(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, sa loi de probabilité est:

x_i	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2 Opérations sur les variables aléatoires

2.1 Espérance

Définition: Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $(x_i)_{1\leq i\leq n}$. Nous appelons espérance de X le réel $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = x_1 \times \mathbb{P}(X = x_1) + ... + x_n \times \mathbb{P}(X = x_n)$.

Remarque: L'espérance s'interprète comme étant la valeur moyenne renvoyé par la variable aléatoire.

Exemple: Pour le lancer d'un dé à 6 faces, l'espérance est:
$E(X) = \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$.
En moyenne nous obtenons 3.5 lors du lancer d'un dé à 6 faces non truqué.

Remarque: L'espérance sert beaucoup dans les jeux d'argents. Si l'espérance est positive alors le jeu est intéressant pour le joueur mais pas pour la banque, si l'espérance est négative c'est l'inverse.

Propriété: Soit X une variable aléatoire, a et b deux réels, $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Démo: $E(aX+b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)\mathbb{P}(X = x_i) = a \times \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i) + b \times \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i)}_{=1} = aE(X) + b$.

2.2 Variance et écart-type

Définition: Nous appelons variance d'une variable aléatoire le réel $V(X) = E((X - E(X))^2)$, soit $V(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - E(X))^2\mathbb{P}(X = x_i)$.

Explications: La variable aléatoire $X - E(X)$ calcule les écarts à la moyenne.
La variable $(X - E(X))^2$ calcule donc la moyenne des carrés des écarts à la moyenne et permet de rendre tous les écarts "positifs". La variance calcule donc la moyenne des écarts au carré de X à sa moyenne $E(X)$. Il s'agit donc d'un indicateur de dispersion !

Définition: L'écart-type d'une variable aléatoire X correspond au réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.