

Vocabulaire ensembliste et logique

1ère

Sacha Darthenucq

1 Ensembles et sous-ensembles

1.1 Définition

Définition: Un ensemble, au sens mathématique, est une collection d'objets mathématiques.

Notation: Pour former l'ensemble E de la collection d'objets x_1, \dots, x_n on note $E = \{x_1; \dots; x_n\}$. Les éléments de la collection d'objets sont compris entre des accolades $\{ \}$ et sont séparés par des points virgules $;$.

Remarque: 1 désigne l'élément 1 tandis que $\{1\}$ désigne un ensemble contenant un seul élément qui est 1.

Remarque: L'ensemble ne contenant aucun élément est appelé l'ensemble vide et est noté \emptyset .

Exemple:

- $E = \{1; 2; 5\}$ est un ensemble contenant les chiffres 1, 2 et 5.
- $E = \{\{1, 2\}; \mathbb{R}\}$ est un ensemble contenant 2 ensembles, l'ensemble $\{1; 2\}$ et l'ensemble \mathbb{R}

On peut avoir des ensembles d'ensembles !

Remarque: $\{1; 2\}$ désigne un ensemble dont les éléments sont 1 et 2, tandis que $\{\{1; 2\}\}$ désigne un ensemble dont l'unique élément est l'ensemble $\{1; 2\}$.

1.2 Appartenance, inclusion

Définition: On dit qu'un élément x appartient à un ensemble E , si l'élément x est présent dans la collection d'objets décrite par l'ensemble E . On note alors $x \in E$, le symbole \in voulant dire appartient à.

Exemple:

- Pour $E = \{1; 2; 5\}$, on a $1 \in E$, $2 \in E$, $5 \in E$.
- Pour $E = \{\{1, 2\}; \mathbb{R}\}$, on a $\{1, 2\} \in E$, $\mathbb{R} \in E$.

Remarque: Pour dire qu'un élément y n'appartient pas à un ensemble E , c'est à dire qu'il n'est pas compris dans la collection d'objet de E , on note $y \notin E$, le symbole \notin signifiant n'appartient pas à.

Définition: On dit qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble E si tous les éléments de A appartiennent à E , on note alors $A \subset E$ avec \subset signifiant inclus dans. Cela se traduit mathématiquement par $A \subset E$ ssi pour tous $x \in A$, $x \in E$.

Définition: On appelle sous-ensemble de E tout ensemble A inclus dans E .

Remarque: On dit qu'un ensemble A n'est pas inclus dans l'ensemble E s'il existe $x \in A$ tel que $x \notin E$. On note alors $A \not\subset E$.

Exemple: Pour $E = \{1; 2; 5\}$, on a $\emptyset \subset E$, $\{1\} \subset E$, $\{2\} \subset E$, $\{5\} \subset E$, $\{1; 2\} \subset E$, $\{1; 5\} \subset E$, $\{2; 5\} \subset E$ et $\{1; 2; 5\} \subset E$.

Remarque: Ne pas confondre appartenance et inclusion. L'appartenance concerne un élément d'un ensemble, tandis que l'inclusion concerne un sous-ensemble. Ainsi en reprenant l'exemple précédent on ne peut pas dire $1 \subset E$, mais on peut dire par contre $\{1\} \subset E$ car en mettant les accolades on crée un ensemble à un élément. De même on ne peut pas dire $\{1\} \in E$.

Exemple: Cet exemple est un peu plus complexe car on va toucher à des ensembles d'ensembles: $E = \{\{1, 2\}; \mathbb{R}\}$

Peut on dire $\{1; 2\} \subset E$? Non. Pourtant on a bien mis un ensemble inclus dans un autre ensemble. Oui mais cet ensemble $\{1; 2\}$ n'est pas inclus dans E .

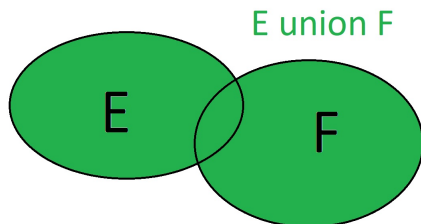
Reprenons la définition, si $\{1; 2\} \subset E$ alors tout élément de $\{1; 2\}$ appartient à E . Donc $1 \in E$ et $2 \in E$ ce qui n'est pas vrai!

Ici on peut dire par contre $\{\{1; 2\}\} \subset E$. De même on ne peut pas dire $\mathbb{R} \subset E$ mais on peut dire $\{\mathbb{R}\} \subset E$.

1.3 Union, intersection

Définition: On définit l'union de deux ensembles E et F comme étant la collection de tous les éléments de E auquel on rajoute tous les éléments de F . On note ce nouvel ensemble $E \cup F$ avec \cup signifiant union.

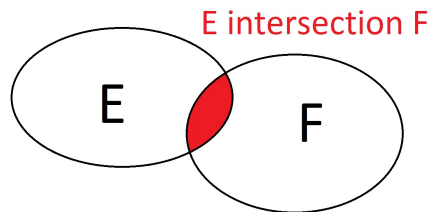
Remarque: Si un élément est présent dans chacun des ensembles, il n'apparaît qu'une fois dans leur union.



Exemple: Pour $E = \{1; 2; 5\}$ et $F = \{\{1, 2\}; \mathbb{R}\}$ on obtient $E \cup F = \{1; 2; 5; \{1, 2\}; \mathbb{R}\}$. On peut avoir des ensembles contenant des objets de différentes nature. Ici notre ensemble contient des nombres et des ensembles de nombres.

Définition: On définit l'intersection de deux ensembles E et F comme étant la collection de tous les éléments étant présents à la fois dans E et dans F . On note cet ensemble $E \cap F$ avec \cap signifiant intersection.

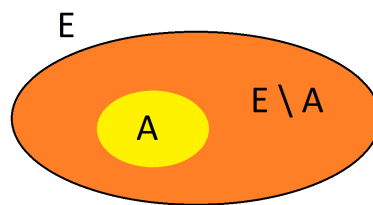
Remarque: Si E et F n'ont pas un seul élément en commun, alors leur intersection est vide, on note $E \cap F = \emptyset$.



Exemple: Pour $E = \{1; 2; 5; 9\}$ et $F = \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ on obtient $E \cap F = \{5; 9\}$

1.4 Complémentaire

Définition: Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E . On appelle complémentaire de A dans E , le sous-ensemble $B \subset E$ tel que $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$. Le complémentaire de A dans E est constitué de tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A . On le note, $E \setminus A$ (\setminus voulant dire : privé de), ou \bar{A} .



Exemple: Soit $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ et $A = \{2; 5\}$, $\bar{A} = \{1; 3; 4\}$.

Exemple: L'ensemble des irrationnels est l'ensemble des réels qui ne sont pas des rationnels, on note donc cet ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2 Proposition mathématique

2.1 Définition et premiers exemples

Définition: Une proposition est un énoncé mathématique qui peut être vrai ou faux.

Exemple: Un nombre réel est toujours un nombre décimal (qui se traduit en maths par $\mathbb{R} \subset \mathbb{D}$), est une proposition bien qu'elle soit clairement fausse (voir cours sur l'introduction à l'arithmétique).

Exemple: "Tout nombre pair admet 2 comme diviseur", est une proposition mathématique qui est vraie.

2.2 Connecteurs logiques "et", "ou"

Définition: Le connecteur logique "et" sert à relier 2 propositions pour en former une unique. La proposition résultante est vraie si les deux propositions sont elles-même vraies.

Exemple:

- La proposition : "(Un nombre réel est toujours un nombre décimal) et (Tout nombre pair admet 2 comme diviseur)" est fausse car la sous-proposition "Un nombre réel est toujours un nombre décimal" est fausse.
- La proposition : "(La solution de l'équation $ax + b = 0$ est $-\frac{b}{a}$) et (Un nombre impair n'admet pas 2 comme diviseur)" est vraie car les deux sous-propositions sont vraies.

Définition: Le connecteur logique "ou" sert à relier 2 propositions pour en former une unique. La proposition résultante est vraie si au moins une des deux propositions est vraie.

Remarque: La proposition résultante d'un "ou" est fausse seulement si les deux propositions que le "ou" connecte sont toutes les deux fausses.

- La proposition : "(Un nombre réel est toujours un nombre décimal) ou (Tout nombre pair admet 2 comme diviseur)" est vraie car la sous-proposition "Tout nombre pair admet 2 comme diviseur" est vraie bien que "Un nombre réel est toujours un nombre décimal" soit fausse.
- La proposition : "(La solution de l'équation $ax + b = 0$ est $-\frac{b}{a}$) ou (Un nombre impair n'admet pas 2 comme diviseur)" est vraie car les deux sous-propositions sont vraies.

2.3 Implication, équivalence

Définition: Une implication est une proposition qui est la résultante de deux propositions, l'une s'appelle la condition et l'autre la conséquence. On la note "condition \implies conséquence" et elle se lit "condition entraîne conséquence", ou aussi "Si condition, alors conséquence".

Remarque: Une implication peut être vraie ou fausse.

Exemple:

- "Un nombre x est pair $\implies x$ est divisible par 2" est une implication qui est vraie
- "Un nombre x est pair $\implies x$ est divisible par 4" est une implication qui est fausse

Définition: Une équivalence est une proposition qui est la résultante de deux propositions, notons les $P1$ et $P2$. On la note $P1 \iff P2$, elle se lit $P1$ si et seulement si (ssi) $P2$. Cette proposition correspond à " $(P1 \implies P2)$ et $(P2 \implies P1)$ ".

Remarque: Une équivalence peut être vraie ou fausse.

Exemple:

- "Un nombre x est pair $\iff x$ est divisible par 2" est une équivalence qui est vraie, car les 2 implications dans chacun des sens sont vraies.
- "Un nombre x est pair $\iff x$ est divisible par 4" est une équivalence qui est fausse, car bien que l'implication "est divisible par 4 \implies est pair" soit vraie, l'implication "est pair *implies* est divisible par 4" est fausse.

2.4 Négation, réciproque

La négation d'une proposition P consiste à créer une proposition $non(P)$ telle que si P est vraie, $non(P)$ est fausse et si P est fausse, $non(P)$ est vraie.

Pour réaliser une telle proposition, on doit dire le contraire de ce que dit P .

Exemple: Pour $P : "x \in \mathbb{R}"$ on obtient $non(P) : "x \notin \mathbb{R}"$.

Propriété: La négation de " P et Q " est " $non(P)$ " ou " $non(Q)$ ".

Exemple: Pour $P : "x \in \mathbb{N}$ et x divisible par 2" on obtient $non(P) : "x \notin \mathbb{N}$ ou x n'est pas divisible par 2".

Propriété: La négation de " P ou Q " est " $non(P)$ " et " $non(Q)$ ".

Exemple: Pour $P : "x \in \mathbb{N}$ ou x divisible par 2" on obtient $non(P) : "x \notin \mathbb{N}$ et x n'est pas divisible par 2".

Définition: La réciproque d'une implication $P \implies Q$ est l'implication $Q \implies P$.

Remarque: Si une implication et sa réciproque sont vraies, alors il y a équivalence.

3 Raisonnements

3.1 Par disjonction de cas

Le raisonnement par disjonction de cas consiste à résoudre un problème en découpant le problème en différents sous-problèmes, et en les résolvant chacun séparément.

Exemple: Pour tous $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$ (pour la valeur absolue | | voir le cours sur les intervalles et distances). On cherche à savoir si cette proposition est vraie.

Pour le savoir on va faire un raisonnement par disjonction de cas, en examinant d'abord pour $x \geq 0$ puis pour $x < 0$ car la valeur absolue a des comportements différents en fonction de $x \geq 0$ ou $x < 0$. Ce qui est intéressant, c'est qu'en procédant de cette manière, on a couvert tous les éléments de \mathbb{R} , car un élément de \mathbb{R} est soit positif ou nul, soit négatif.

- Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$ donc $|x| \geq 0$.
- Si $x < 0$, alors $|x| = -x$, comme $x < 0$ on a $-x > 0$ soit $|x| > 0$

La proposition est donc vraie.

3.2 Par contre-exemple

Pour montrer qu'une proposition est fautive, on peut fournir un cas particulier qui prouve que la proposition est fautive, cela s'appelle alors un contre-exemple.

Exemple: P : "Tout nombre pair admet 4 comme diviseur". 2 est un nombre pair mais 2 n'admet pas 4 comme diviseur, on a fourni un contre-exemple qui montre que la proposition est fautive.

3.3 Par l'absurde

Pour montrer qu'une proposition est vraie, on peut supposer qu'elle est fautive et montrer qu'on arrive alors à une contradiction.

Exemple: 0 n'a pas d'inverse. Rappel: l'inverse d'un réel a est un réel b tel que $a \times b = 1$.

On le montre par l'absurde: supposons que 0 admette un inverse.

Alors il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $0 \times b = 1$ donc $(0 + 0) \times b = 1$ soit $0 \times b + 0 \times b = 1$ d'où $0 + 0 = 1$. En considérant la proposition "0 n'admet pas d'inverse" comme fautive, donc en considérant "0 admet un inverse" comme vraie, on aboutit à une contradiction. Donc 0 n'admet pas d'inverse.