Fonctions de référence
2nd

Sacha Darthenucq

Prérequis de 2nd:

- **Vocabulaire ensembliste et logique**
- **Introduction aux fonctions**

1 Fonction carrée

1.1 Étude

Définition: La fonction carrée est la fonction $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$, $\mathbb{R}^+$ étant l'ensemble des réels positifs ou nuls.

Propriété: La fonction carrée est décroissante sur $]-\infty;0[$ et est croissante sur $[0;+\infty[$.

Démo:

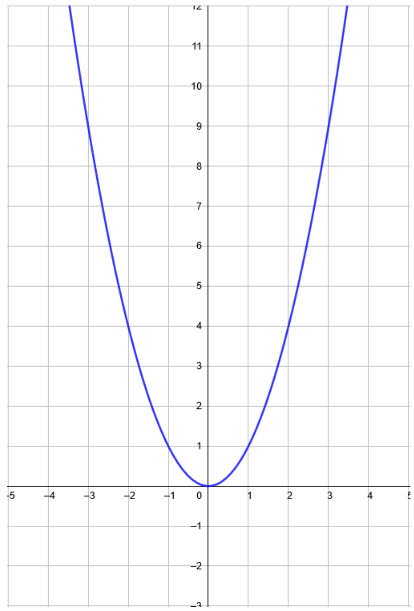
- Étude des variations sur $\mathbb{R}^-$ (les réels négatifs):
  Soit $a \in \mathbb{R}^-$ et $b \in \mathbb{R}^-$ tels que $a \leq b$.
  $f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
  $$\left.\begin{array}{l} a \leq 0 \text{ et } b \leq 0 \text{ donc } (a+b) \leq 0 \\ a \leq b \text{ donc } (a-b) \leq 0 \end{array}\right\} \implies (a-b)(a+b) \geq 0 \text{ soit } f(a) - f(b) \geq 0$$
  Donc $f(a) \geq f(b)$, soit f décroissante sur $\mathbb{R}^- =]-\infty;0]$

- Étude sur $\mathbb{R}^+$:
  Soit $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^-$ tels que $a \leq b$.
  $f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
  $$\left.\begin{array}{l} a \geq 0 \text{ et } b \geq 0 \text{ donc } (a+b) \geq 0 \\ a \leq b \text{ donc } (a-b) \leq 0 \end{array}\right\} \implies (a-b)(a+b) \leq 0 \text{ soit } f(a) - f(b) \leq 0$$
  Donc $f(a) \leq f(b)$, soit f croissante sur $\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$

Tableau de variation:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

1.2 Courbe représentative



Propriété: La courbe représentative de la fonction carrée est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (axe y).

Démo: $(-x)^2 = x^2$, la fonction carrée est donc paire, sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Propriété: Position relative des courbes $y = x$ et $y = x^2$:

- Pour $x \in [0; 1]$ on a $x^2 \leq x$,
- Pour $x \in [1; +\infty[$ on a $x^2 \geq x$.

Démo:

- $x \leq 1$ on multiplie par x l'inégalité (x est positif donc le sens de l'inégalité ne change pas), on obtient $x^3 \leq x^2$,
- $x \geq 1$ on fait de même et on obtient $x^2 \geq x$.

1.3 Équation, inéquation

Propriété: Soit k un réel positif, l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = k$ est $\mathcal{S} = \{-\sqrt{x}; \sqrt{x}\}$.

Propriété: Soit k un réel positif, l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 < k$ est $\mathcal{S} =]-\sqrt{x}; \sqrt{x}[$.

Démo: Soit k un réel positif, $x^2 < k \iff x^2 - k < 0 \iff (x - \sqrt{k})(x + \sqrt{a}) < 0$ identité remarquable.
On utilise un tableau de signe:

x	$-\infty$		$-\sqrt{k}$		$+\sqrt{k}$		$+\infty$
$x - \sqrt{k}$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + \sqrt{k}$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x - \sqrt{k})\ (x + \sqrt{k})$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Grâce au tableau de signe on déduit tout de suite que $(x-\sqrt{k})(x+\sqrt{k}) < 0 \iff x \in]-\sqrt{k}; +\sqrt{k}[$.

2 Fonction cube

2.1 Étude

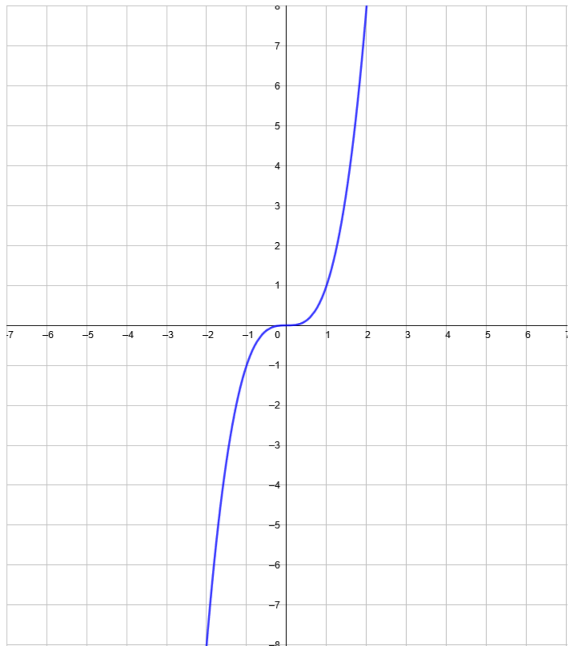
Définition: La fonction cube est la fonction $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{cases}$.

Propriété: La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2.2 Courbe représentative



Propriété: La courbe représentative de la fonction cube est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Démo: $(-x)^3 = -(x)^3$, la fonction est donc impaire, sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'origine du repère.

Propriété: Position relative des courbes $y = x^2$ et $y = x^3$:

- Pour $x \in [0; 1]$ on a $x^3 \leq x^2$,
- Pour $x \in [1; +\infty[$ on a $x^3 \geq x^2$.

Démo:

- $x \leq 1$ on multiplie par x^2 l'inégalité (x^2 est positif donc le sens de l'inégalité ne change pas), on obtient $x^3 \leq x^2$,
- $x \geq 1$ on fait de même et on obtient $x^3 \geq x^2$.

2.3 Équation, inéquation

Définition: On définit la racine cubique d'un réel x positif comme étant l'unique réel positif y tel que $y^3 = x$. La racine cubique de x est noté $\sqrt[3]{x}$.

Propriété: Soit k un réel positif, l'ensemble des solutions de l'équation $x^3 = k$ est $\mathcal{S} = \{-\sqrt[3]{x}; \sqrt[3]{x}\}$.
Propriété: Soit k un réel positif, l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 < k$ est $\mathcal{S} =]-\sqrt{x}; \sqrt{x}[$.

3 Fonction inverse

3.1 Étude

Définition: La fonction inverse est la fonction $\begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x} \end{cases}$, $\mathbb{R}^*$ étant l'ensemble des réels non nuls.

$\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

Remarque: La fonction inverse n'est pas définie en 0 !

Propriété: La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et est décroissante sur $]0; +\infty[$.

Démo: Soit a et b deux réels de même signe tels que $a \leq b$.

a et b sont de même signe, donc $ab \geq 0$ soit $\dfrac{1}{ab} \geq 0$.

Ainsi $a \times \dfrac{1}{ab} \leq b \times \dfrac{1}{ab}$

D'où $\dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{a}$.

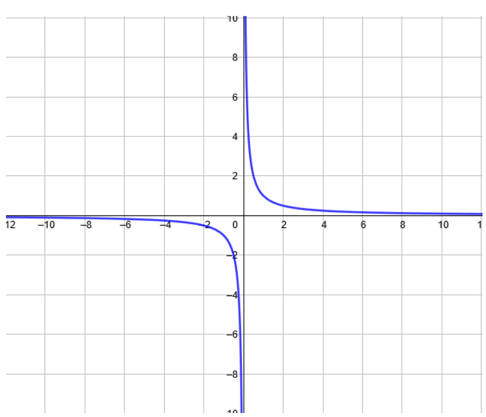
La fonction inverse est donc décroissante sur les intervalles de signe constant, elle est donc décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

Tableau de variation:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

Remarque: La double barre symbolise la discontinuité en 0 de la fonction inverse.

3.2 Courbe représentative



Propriété: La courbe représentative de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Démo: La fonction inverse est impaire.

4 Fonction racine carrée

4.1 Étude

Définition: La fonction carrée est la fonction qui a tout réel positif x associe l'unique réel positif y tel que $y^2 = x$. Ce réel est noté $\sqrt{x}$.

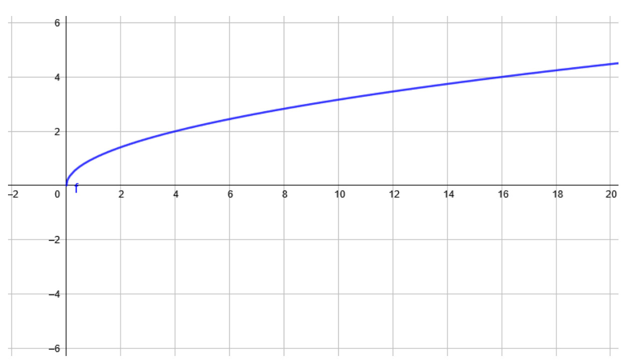
$\sqrt{} \; : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array} \right. .$

Propriété: La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Démo: Soit a et b deux réels positifs tels que $a \leq b$.

- Si $a = 0 = b$, alors $\sqrt{a} = 0 = \sqrt{b}$ donc $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$,
- Si au moins $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, $\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \times \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \dfrac{a^2 - b^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$
  On multiplie par la **quantité conjuguée**, méthode importante à retenir
  La fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $a^2 - b^2 \leq 0$ et comme $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 0$, on obtient $\dfrac{a^2 - b^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \leq 0$ donc $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$. La fonction racine carrée est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$.

4.2 Courbe représentative



4.3 Équation

Propriété: L'équation $\sqrt{x} = k$ admet pour ensemble de solution:

- $\mathcal{S} = \{k^2\}$ si $k \geq 0$,
- $\mathcal{S} = \varnothing$ si $k < 0$.