Introduction aux fonctions
2nd

Sacha Darthenucq

Prérequis de 2nd:

- **Vocabulaire ensembliste et logique**

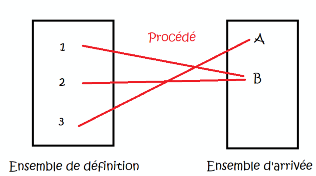
1 Rappel : Définition

1.1 Les différentes données

Pour définir une fonction on a besoin de plusieurs données:

- Un ensemble de départ que l'on appelle **ensemble de définition**, noté $\mathcal{D}$, qui est l'ensemble ou la fonction prendra ses valeurs,
- Un **ensemble d'arrivée** qui correspond à l'ensemble des valeurs que peut retourner la fonction,
- Une **procédure** qui associe à tout élément de l'ensemble de départ, un unique élément de l'ensemble d'arrivé.

Remarque: Une fonction associe à un élément de l'ensemble de départ un unique élément de l'ensemble d'arrivée, MAIS plusieurs éléments de l'ensemble de départ peuvent arriver sur le même élément de l'ensemble d'arrivée:



Une fonction

Exemple: On peut par exemple considérer la fonction dont l'ensemble de définition est $\mathcal{D} = \{1; 2; ...; 24\}$, l'ensemble d'arrivée l'alphabet latin, et le procédé consistant à associer à un nombre i la i^{eme} lettre de l'alphabet.

1.2 Notation

Lorsque l'on définit une fonction on la note $f : \begin{cases} E \to F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$

- E correspond à l'ensemble de de départ (ou de définition),
- F correspond à l'ensemble d'arrivée,
- f est le nom de la fonction,
- x correspond à un élément de l'ensemble de départ (E),
- $f(x)$ est l'élément de l'espace d'arrivée que le procédé de la fonction associe à x,
- $\to$ associe l'ensemble de départ avec l'ensemble d'arrivée,
- $\mapsto$ symbolise le procédé qui à x associe $f(x)$, on peut le lire "associe".

1.3 Vocabulaire

Définition: Soit $f : \begin{cases} E \to F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ une fonction.

- Soit x un élément de l'ensemble de départ E. On appelle **image** de x par f, l'unique élément y de l'espace d'arrivée F tel que $f(x) = y$,
- Soit y un élément de l'espace d'arrivée F, on appelle antécédent de y par f, tout $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On appelle l'ensemble des antécédents de y par f l'ensemble formé par la collection des $x \in E$ tels que $f(x) = y$.

Remarque: Il se peut qu'un ou plusieurs éléments de l'espace d'arrivé F n'admettent pas d'antécédent f. Un élément de l'espace d'arrivée peut avoir plusieurs antécédents, d'ou l'utilité de définir l'ensemble des antécédents d'un élément par une fonction.

Exemple: Considérons $f \begin{cases} 0;1 \to 0;1 \\ x \mapsto 1 \end{cases}$

L'image de 0 par f est 1.
L'image de 1 par f est 1.
0 est un antécédent de 1 par f $(f(0) = 1)$
1 est un antécédent de 1 par f $(f(1) = 1)$
0 n'admet pas d'antécédents par f (il n'existe pas de x tel que $f(x) = 0$)
L'ensemble des antécédents de 1 par f est l'ensemble $\{0; 1\}$.

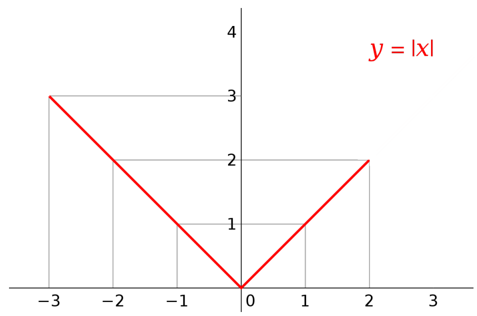
2 Représentation graphique

On en considère ici que des fonctions dont l'ensemble de départ est un intervalle ou une union d'intervalles, et dont l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$.

2.1 Fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$

Définition: Soit $f \left\{ \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$ une fonction avec E un intervalle ou une réunion finie d'intervalles. Dans le plan muni d'un repère, on représente la fonction f par la courbe $y = f(x)$ correspondant à l'ensemble des points dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient $y = f(x)$, cette courbe s'appelle courbe représentative de f notée $\mathcal{C}_{\{}$.

Exemple: Soit $g \left\{ \begin{array}{l} [-3; 2] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{array}{l} x \text{ si } x \ \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{array} \end{array} \right.$ il s'agit de la fonction valeur absolue $|\ |$ restreinte à l'intervalle $[-3; 2]$.



2.2 Résoudre graphiquement une équation / inéquation

Propriété:Soit f une fonction et k un réel, l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = k$ correspond à l'abscisse de l'ensemble des point d'intersection de $\mathcal{C}_{\{}$ avec la droite d'équation $y = k$.

Exemple:

Propriété: Soit f une fonction et k un réel, l'ensemble des solution de l'inéquation $f(x) \geq k$ correspond à l'ensemble des point de $\mathcal{C}_{\{}$ situés au dessus ou sur la droite d'équation $f(x) = k$.

Exemple:

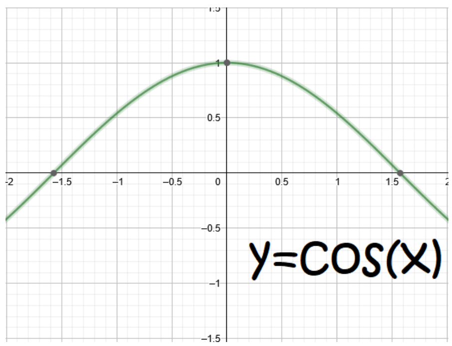
Remarque: De même on peut résoudre graphiquement $f(x) < k$, $f(x) > k$ ...

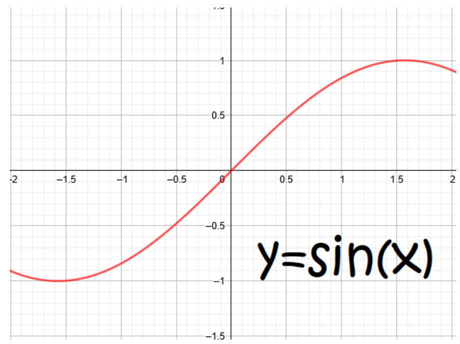
2.3 Parité / Imparité

Définition: Soit $f \left\{ \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$ une fonction avec E ensemble symétrique, c'est à dire pour tout $x \in E$, $-x \in E$.
- f est dite paire $\iff$ pour tout $x \in E$, $f(-x) = f(x)$,
- f est dite impaire $\iff$ $f(-x) = -f(x)$.

Propriété: Graphiquement:
- Une fonction paire à sa courbe représentative symétrique par rapport à l'axe des ordonnées,
- Une fonction impaire à sa courbe représentative symétrique par rapport à l'origine du repère.

Exemple: La fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire,



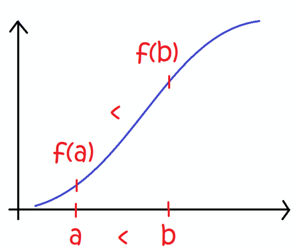


3 Variation des fonctions

3.1 Croissance, décroissance

Définition: Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est croissante sur I ssi la proposition "Pour tout $a \in I$, pour tout $b \in I$, $a \leq b \implies f(a) \leq f(b)$" est vraie.

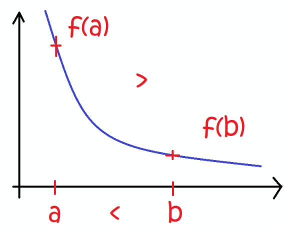
Remarque: Une fonction f est **strictement** croissante sur I ssi pour tout $a \in I$, pour tout $b \in I$, $a < b \implies f(a) < f(b)$



Exemple: Une fonction affine (rappel: de la forme $f(x) = ax + b$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$) est croissante pour $a > 0$.

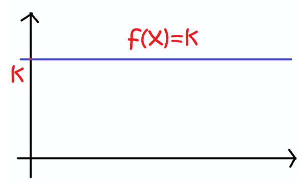
Définition: Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est décroissante sur I ssi la proposition "Pour tout $a \in I$, pour tout $b \in I$, $a \leq b \implies f(a) \geq f(b)$" est vraie.

Remarque: Une fonction f est **strictement** décroissante sur I ssi pour tout $a \in I$, pour tout $b \in I$, $a < b \implies f(a) > f(b)$



Exemple: Une fonction affine est décroissante pour $a < 0$.

Définition: Soit f une fonction définie sur u intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f est constante sur I ssi il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $f(x) = k$.

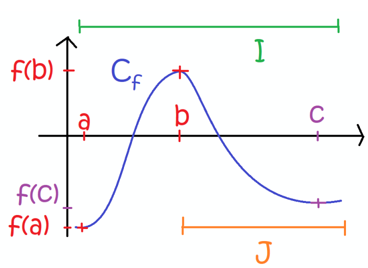


3.2 Extremums

Définition: Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que:

- f admet un **maximum** en $a \in I$ ssi pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$,
  $f(a)$ s'appelle alors le maximum de f sur I,
- f admet un **maximum** en $a \in I$ ssi pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$,
  $f(a)$ s'appelle alors le minimum de f sur I,

Exemple:



Ici:

- $f(a)$ est le minimum de f sur I,
- $f(b)$ est le maximum de f sur I,
- $f(c)$ est le minimum de f sur J.

4 Tableaux

4.1 Tableaux de signes

Un moyen tout à fait commode pour résoudre une inéquation dans certains cas consiste à réaliser des tableaux de signes.
Pour réaliser un tel tableau, il faut bien avoir un tête que

- $(-) \times (-) = +$,
- $(+) \times (+) = +$,
- $(+) \times (-) = -$.

Considérons deux fonctionc f et g définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que

- f soit positive sur $]-\infty; x[\cup]y; +\infty[$ avec bien entendu $x < y$, f soit nulle en x et y, et négative sur $]x; y[$.
- g soit négative sur $]-\infty; z[$, nulle en z et positive sur $]z; +\infty[$, avec $x < z < y$.

Pour étudier le signe de $f \times g$ on réalise le tableau de signe suivant:

x	$-\infty$		x		z		y		$+\infty$
f		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
g		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

Remarque: On précise bien le signe de chaque fonctions sur chaque sous-intervalle !

On a renseigné dans un tableau le signe de chacune des fonctions sur chaque sous-intervalle, il reste encore à ajouter la ligne correspondant au produit des deux fonctions:

x	$-\infty$		x		z		y		$+\infty$
f		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
g		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f \times g$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Voilà un super tableau de signe qui permet facilement de résoudre, par exemple, l'inéquation $f \times g \geq 0$.

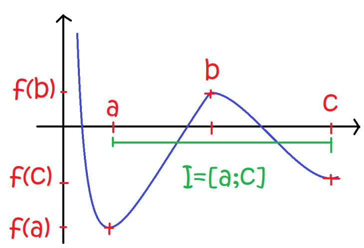
Exemple: $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = -3x + 4$. Résoudre $fg < 0$.
f s'annule en $x = \frac{3}{2}$. C'est une fonction affine de coefficient directeur $2 > 0$ donc elle est croissante.
f est donc négative sur $]-\infty; \frac{3}{2}[$ nulle en $\frac{3}{2}$ et positive sur $]\frac{3}{2}; +\infty[$.
De même g s'annule en $x = \frac{4}{3}$. C'est une fonction affine de coefficient directeur $-3 < 0$ donc elle est décroissante. g est donc positive sur $]-\infty; \frac{4}{3}[$ nulle en $\frac{4}{3}$ et négative sur $]\frac{4}{3}; +\infty[$.
On réalise le tableau de signe:

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
f		$-$		$-$	0	$+$	
g		$+$	0	$-$		$-$	
$f \times g$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On obtient que l'ensemble des solutions de l'inéquation $fg < 0$ est $\mathcal{S} =]-\infty; \frac{4}{3}[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[$.

4.2 Tableaux de variations

De même il est commode lors de l'étude d'une fonction de présenter un tableau qui résume les différentes variations d'une fonctions f sur un intervalle I ainsi que les différents extremums. Exemple:



Ici:

- f est croissante sur $[a; b]$,
- f est décroissante sur $[b; c]$.

x	a		b		c
f	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$	$f(c)$