

Compléments de géométrie

2nd

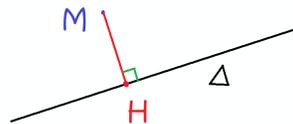
Sacha Darthenucq

Prérequis:

- Vocabulaire ensembliste et logique (2nd)

1 Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Définition: Le projeté orthogonal H d'un point M sur la droite Δ , est le point d'intersection de Δ avec la droite qui passe par M et coupe Δ perpendiculairement.



Propriété: Le projeté orthogonal du point M sur la droite Δ est le point de Δ le plus proche de M .

Démo: Soient Δ une droite et M un point quelconque, soit H le projeté orthogonal de M sur Δ . On raisonne par disjonction de cas:

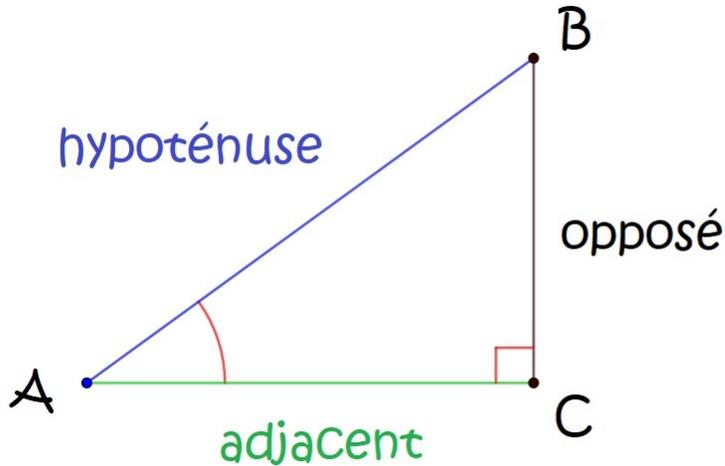
- Si $M \in \Delta$, alors $MH = 0$ et pour tous point $A \in \Delta$ tel que $A \neq H$, $MA > 0$, donc H est le point de Δ le plus proche de M .
- Si $M \notin \Delta$, alors pour tous point $A \in \Delta$, MAH forme un triangle rectangle en H car $MH \perp HA$.
D'après le théorème de pythagore $MH^2 + HA^2 = MA^2$, or $HA < 0$ donc $HA^2 > 0$.
On travaille sur l'inégalité en additionnant de chaque coté MH^2 , $MH^2 + HA^2 > MH^2$ donc $MA^2 > MH^2$.

Conclusion: H est le point de Δ le plus proche de M .

2 Trigonométrie dans un triangle rectangle

Définition: Dans un triangle rectangle, pour tout angle autre que l'angle droit, on définit,

- $\cos(\text{angle}) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$
- $\sin(\text{angle}) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$
- $\tan(\text{angle}) = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$



$$\cos(\alpha) = \frac{AC}{AB}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{BC}{AB}$$

Remarque: On peut retenir les formules de trigonométrie à l'aide de la phrase suivante : CAH SOH TOA (casse-toi).

Propriété: Pour tout angle α on a $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$.

Démo:

On se place dans un triangle rectangle où apparaît notre angle alpha. D'après le théorème de Pythagore, $\text{opposé}^2 + \text{adjacent}^2 = \text{hypoténuse}^2$.

$$\begin{aligned} \cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 &= \left(\frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} \right)^2 + \left(\frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}} \right)^2 \\ &= \frac{\text{adjacent}^2}{\text{hypoténuse}^2} + \frac{\text{opposé}^2}{\text{hypoténuse}^2} \\ &= \frac{\text{adjacent}^2 + \text{opposé}^2}{\text{hypoténuse}^2} \\ &= \frac{\text{hypoténuse}^2}{\text{hypoténuse}^2} \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$$

