Droites
2nd

Sacha Darthenucq

**Prérequis:**

- **Vocabulaire ensembliste et logique (2nd)**

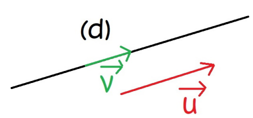
# 1 Équation d'une droite

## 1.1 Équation cartésienne

**Définition:** On appelle vecteur directeur d'une droite $d$, tout vecteur $\vec{u}$ tel que la direction de $\vec{u}$ soit parallèle à $d$.

**Remarque:** Une droite admet une infinité de vecteurs directeurs.

Exemple:




Ici $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs de la droite $(d)$.

**Définition:** Une équation de droite est une égalité vérifiée uniquement par les coordonnées des points appartenant à cette droite.

**Théorème:** Pour toute droite $(d)$ du plan, il existe trois réels $a, b, c$ tels que $(d)$ ait pour équation $ax + by + c = 0$. Elle s'appelle l'équation cartésienne de $(d)$. Dans ce cas le vecteur $\vec{u} = (-b; a)$ est un vecteur directeur de la droite $(d)$.

Démo: Soit $(d)$ une droite passant par le point $A(x_a; y_a)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\beta; \alpha)$. Montrons que cette droite admet une équation cartésienne:
Soit $M(x; y)$ un autre point de $(d)$, alors $\overrightarrow{AM}(x - x_a; y - y_a)$ est un vecteur directeur de $(d)$.
Donc $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires (même direction) donc leur déterminant est nul,
$(x - x_a) \times \alpha - (y - y_a)\beta = 0$ soit $\alpha x + (-\beta)y + (\beta y_a - \alpha x_a) = 0$
Nous obtenons bien une équation cartésienne de la droite de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = \alpha$ et $b = -\beta$, d'où $\vec{u} = (-b; a)$ vecteur directeur de $(d)$.

### 1.2 Équation réduite

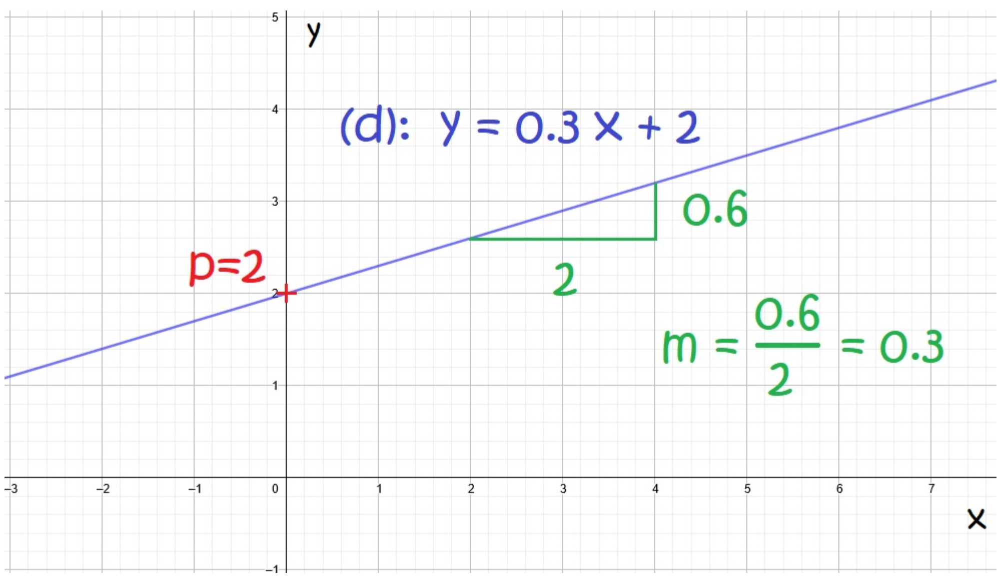
Propriété: Toute droite $(d)$ admet une équation de la forme $y = mx + p$ avec $m, p$ réels, appelé équation réduite de $(d)$. Le vecteur $\vec{u}(1; m)$ est alors un vecteur directeur de $(d)$.

Démo: Toute droite $(d)$ non parallèle à l'axe des ordonnées, admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$.

- Si $b \neq 0$, alors $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ donc $y = mx + p$ avec $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$.
  Le vecteur $\vec{v}(1; m = -\frac{a}{b})$ est colinéaire au vecteur directeur de $(d)$ $\vec{u}(-b; a)$; en effet $\vec{u} = -b\vec{v}$.
  Donc $\vec{v}(1; m)$ et un vecteur directeur de $(d)$.
- Si $b = 0$, alors $ax = -c$, comme $a \neq 0$ sinon on a pas de droite du tout (car on a déjà $b \neq 0$), alors $x = -\frac{c}{a}$ ce qui représente une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

**Définition:** Soit $(d)$ une droite d'équation réduite $y = mx + p$. Le coefficient $m$ s'appelle la pente de la droite, le coefficient $p$ s'appelle l'ordonnée à l'origine.

**Remarque:** Lecture graphique de m et p




**Théorème:** Soient $A(x_a; y_a)$ et $B(x_b; y_b)$ deux points distincts d'une droite $(d)$ qui admet une équation réduite, c'est à dire non parallèle à l'axe des ordonnées, soit $x_a \neq x_b$.
Alors le coefficient directeur de $(d)$ vaut $m = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$.

Démo: $A \in (d)$ et $B \in (d)$ donc $y_a = mx_a + p$ et $y_b = mx_b + p$.
On soustrait les deux équations

$$\begin{aligned}
y_a - y_b &= mx_a + p - mx_b - p \\
y_a - y_b &= m(x_a - x_b) \\
\frac{y_a - y_b}{x_a - x_b} &= m \quad \text{La division est licite car } x_a \neq x_b
\end{aligned}$$

### 1.3 Tracé d'une droite à partir de l'équation cartésienne ou réduite

Si on a l'équation cartésienne, alors on prend deux valeurs de $x$ différentes et on calcul le $y$ correspondant. Cela nous donne les coordonnées de deux points de la droite donc on peut la tracer.

**Remarque:** Dans le cas où $b = 0$ dans l'équation cartésienne, on obtient $x = -\frac{c}{a}$ et on trace un trait vertical qui coupe l'axe des abscisses en $-\frac{c}{a}$.

## 2 Propriétés géométriques

### 2.1 Droites parallèles

**Définition:** Deux droites sont parallèles ssi elles n'ont aucun point commun ou sont confondues.

**Définition équivalente:** Deux droites $(d)$ et $(d')$ sont parallèles ssi elles ont la même direction.

Propriété: La définition précédente est donc équivalente à ce qu'au moins un vecteur directeur de $(d)$ soit colinéaire avec un vecteur directeur de $(d')$ ce qui équivaut aussi à ce que tout vecteur directeur de $(d)$ soit colinéaire à tout vecteur directeur de $(d')$.

Propriété: Deux droites $(d)$ et $(d')$ d'équations réduites $y = mx + p$ et $y' = m'x + p$ sont parallèles ssi $m = m'$.

Démo: $(d)$ et $(d')$ parallèles $\iff$ $\vec{u}(1; m)$ vecteur directeur de $(d)$ et $\vec{u'}(1; m')$ vecteur directeur de $(d')$ sont colinéaires $\iff$ $det(\vec{u}, \vec{u'}) = 0$ soit $m - m' = 0$ donc $m = m'$.

### 2.2 Droites sécantes

**Définition:** Deux droites sont sécantes si elles ont un seul point commun, ce qui équivaut à dire que deux droites sont sécantes ssi elles ne sont pas parallèles.

**Méthode:** Trouver le point d'intersection de deux droites
Soit $(d) : ax + by + c = 0$ et $(d') : a'x + b'y + c' = 0$ deux droites.

$$M(x; y) \in (d) \cap (d') \iff \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

On résout le système et on trouve les coordonnées $(x; y)$ du point d'intersection $M$ des deux droites.
Pour la méthode de résolution d'un système voir la section nombre et calculs.