Vecteurs
2nd

Sacha Darthenucq

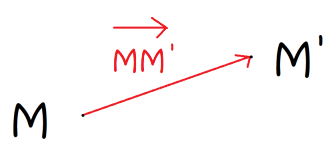
Prérequis:

- **Vocabulaire ensembliste et logique (2nd)**

1 Généralités

1.1 Définition

Définition: Soient M et M' deux points d'un plan. On définit le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ comme étant la translation qui transforme le point M et le point M'. Cette translation est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

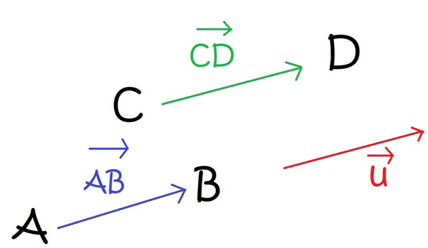


Définition: Un vecteur est caractérisé par 3 éléments mathématiques:

- Sa direction, pour le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ sa direction est la droite (MM'),
- Son sens, pour le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ son sens est de M vers M',
- Sa norme (qui correspond a sa longueur), pour le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ sa norme est la longueur MM'.

Remarque: La notation $\|\overrightarrow{MM'}\|$ désigne la norme du vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

Remarque: Plusieurs vecteurs peuvent désigner une même translation:



Ici les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ désigne la même translation. Il est donc commode de la noter de la même manière.
Ainsi on introduit le vecteur $\vec{u}$ qui désigne cette translation.

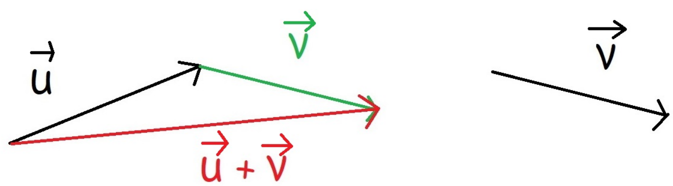
Remarque: Le vecteur $\overrightarrow{MM}$ qui correspond à une translation qui ne change rien, le point M est déplacé sur lui-même, est noté $\vec{0}$ et se lit vecteur nul.

Propriété: Deux vecteurs sont égaux si ils ont:

- La même direction,
- Le même sens,
- La même norme.

1.2 Somme de vecteurs et produit par un réel

Définition: On définit la somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme étant la translation correspondant à l'enchaînement de la translation de vecteur $\vec{u}$ avec la translation de vecteur $\vec{v}$. On note ce vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.

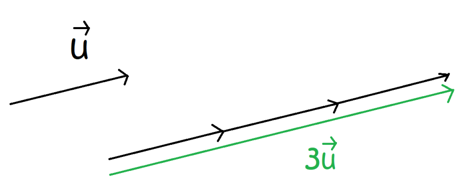


Propriétés: Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs:

- $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{v}$,
- $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$,
- $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$

Définition: Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un réel. On définit le vecteur $k\vec{u}$ $(k\times\vec{u})$ comme étant l'enchaînement de k fois la translation de vecteur $\vec{u}$.
Ce vecteur possède:

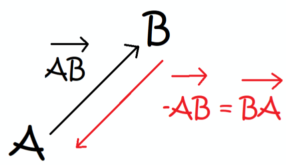
- Une direction identique à celle de $\vec{u}$,
- Un sens identique à celui de $\vec{u}$,
- Une norme égale à k fois celle de $\vec{u}$, $\|k\vec{u}\| = k\times\|\vec{u}\|$.



Propriétés: Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, k et k' deux réels:

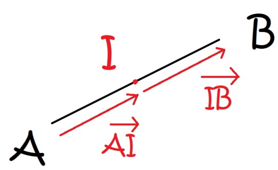
- $k \times (\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k') \times \vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{v}$
- $k \times (k'\vec{u}) = kk'\vec{u}$

Propriété: $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$



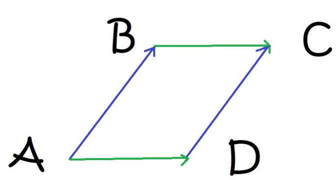
1.3 Propriétés géométriques

Propriété: Soient A et B deux points. I milieu de $AB \iff \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB}$.



Remarque: Dans ce cas $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BI} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Propriété: Soient A, B, C et D quatre points du plan.
$ABCD$ est un parallélogramme $\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.



Relation de Chasles: Soient A et B deux points du plan. Pour tous point C du plan on a la relation de :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.
On peut décomposer tous vecteurs du plan en une somme de deux vecteurs à l'aide d'un point quelconque.

Démo: On utilise un point intermédiaire, ici le point C pour effectuer la translation de A sur B. La translation de A sur B ($\overrightarrow{AB}$) peut tout à fait se décomposer en: la translation de A sur C ($\overrightarrow{AC}$) + la translation de C sur B ($\overrightarrow{CB}$).
La relation de Chasles est donc valide.

Remarque: La relation de Chasles est absolument essentielle !

Propriété: $ABCD$ est un parallélogramme $\iff$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

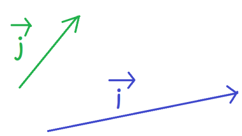
2 Expression un repère

2.1 Coordonnées d'un vecteur, coordonnée d'un point

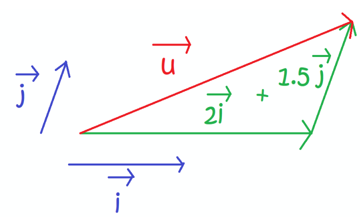
2.1.1 Dans une base

Les coordonnées des vecteurs sont **toujours** exprimées à l'aide d'une base.

Définition: Une base de vecteurs **d'un plan** est un couple de 2 vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ tels que $\vec{i}$ et $\vec{j}$ aient des directions différentes, c'est à dire qui ne soient pas parallèles.



Dans ce cas, on peut décomposer tous vecteur du plan comme la somme $x\vec{i} + y\vec{j}$ avec x, y deux réels qui varient pour chaque vecteur.



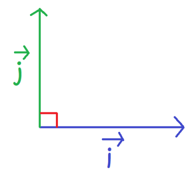
Définition: Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ correspondent aux x et y tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Ces coordonnées forment un couple $(x; y)$ appelé le couple de coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Exemple: Sur la figure ci-dessus, le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(2; 1.5)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Propriété: Les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée sont uniques.

Propriété: Deux vecteurs sont égaux ssi ils ont les mêmes coordonnées.

Définition: Une base est dite orthonormée si les vecteurs de la base $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires et sont de norme 1.



2.1.2 Dans un repère

Définition: Un repère est une base (ici $(\vec{i}, \vec{j})$) munie d'un point O appelé l'origine du repère. Un tel repère se note $(O, \vec{i}, \vec{j})$

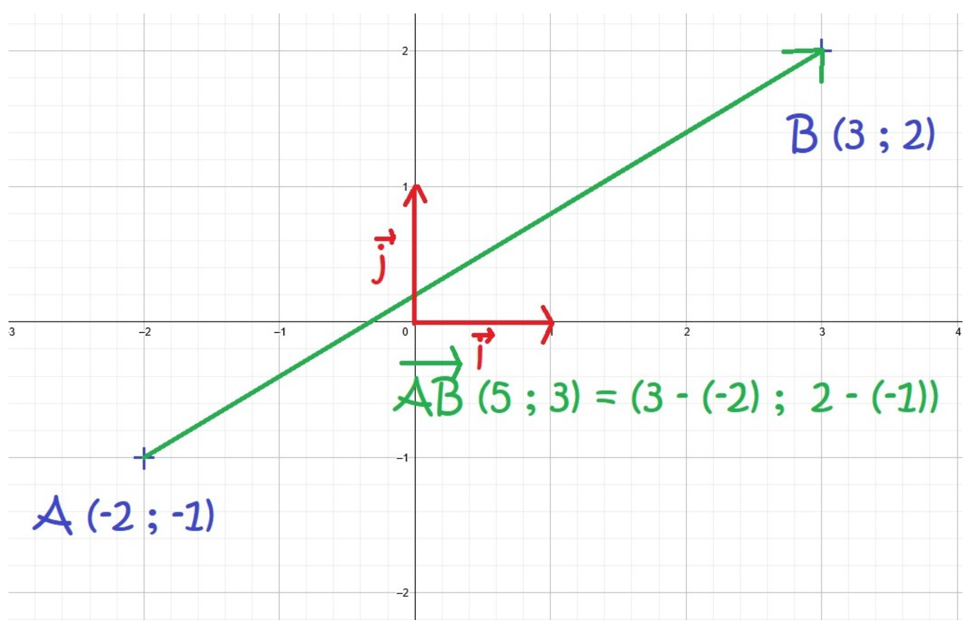
Définition: Soit A un point du plan, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère associé à ce plan. Les coordonnées du point A dans ce repère correspondent aux coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA}$. Pour $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$ on note $A(x_A; y_A)$, le couple $(x_A; y_A)$ correspondant aux coordonnées du point A dans le repère.

Propriété: Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points d'un repère, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Démo:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \text{ application de la relation de Chasles} \\
&= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \\
&= -(x_A\vec{i} + y_A\vec{j}) + (x_B\vec{i} + y_B\vec{j}) \\
\overrightarrow{AB} &= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}
\end{aligned}$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont donc bien $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.
Exemple:



2.2 Propriétés vectorielles dans un repère

Propriété: Soient $\vec{u}(x_u; y_u)$ et $\vec{v}(x_v; y_v)$ deux vecteurs, soit k un réel:

- Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x_u + x_v; y_u + y_v)$,
- Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx_u; ky_u)$.

Démo:

- $\vec{u}+\vec{v} = (x_u\vec{i} + y_u\vec{j}) + (x_v\vec{i} + y_v\vec{j}) = (x_u + x_v)\vec{i} + (y_u + y_v)\vec{j}$,
- $k\vec{u} = k(x_u\vec{i} + y_u\vec{j}) = kx_u\vec{i} + ky_u\vec{j}$.

Exemple: Soient $\vec{u}(2; -3)$ et $\vec{v}(-1; 6)$, alors $\vec{u}+\vec{v}(1; 3)$.

Propriété: Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une **base orthonormée**, $\vec{u}(x; y)$ un vecteur, alors la norme de $\vec{u}$ vaut: $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

Propriété: Soit un repère orthonormé (repère dont la base est orthonormée), $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points de ce repère. La longueur AB vaut: $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

Propriété: Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points d'un repère, les coordonnées du point I milieu du segment $[AB]$ sont $(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2})$.

Démo:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OI} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI} \\
&= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\
&= x_A\vec{i} + x_A\vec{j} + \frac{1}{2}[(x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}] \\
\overrightarrow{OI} &= \frac{x_A + x_B}{2}\vec{i} + \frac{y_A + y_B}{2}\vec{j}
\end{aligned}$$

2.3 Colinéarité et déterminant

Définition: Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Remarque: Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur.

Définition: Soient $\vec{u}(x_u; y_u)$ et $\vec{v}(x_v; y_v)$ deux vecteurs dont les coordonnées sont exprimés dans la base $\mathcal{B}$. On appelle déterminant de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$ le nombre $x_u y_v - x_x y_u$. On le note $det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})$ ou $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$.

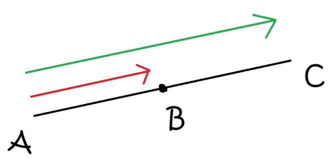
Propriété: Soient $\vec{u}(x_u; y_u)$ et $\vec{v}(x_v; y_v)$ deux vecteurs dont les coordonnées sont exprimés dans la base $\mathcal{B}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\iff det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Démo: On doit montrer 2 implications (une dans chaque sens)

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires:
  Alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$. Donc $x_u = kx_v$ et $y_u = ky_v$.
  Ainsi $det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = x_u y_v - x_v y_u = kx_v y_v - x_v k y_v = 0$.

- Si $det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$:
  Alors $x_u y_v - x_v y_u = 0$
  Si un des vecteurs est nul, c'est plié les vecteurs sont forcément colinéaire car le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.
  Si aucun des vecteurs est nul, dans ce cas au moins une des coordonnées de $\vec{v}$ est non nulle, supposons que ce soit y_v (le fait que ce soit x_v ne va rien changer il faut juste modifier un peu ce qu'on va faire après).
  $x_u = \dfrac{x_v}{y_v} y_u$ on peut diviser par y_v car y_v est non nul
  $\vec{u}(\dfrac{x_v}{y_v} y_u; y_u)$ donc $y_v \vec{u}$ a pour coordonnées $(y_u \times x_v; y_u \times y_v)$ donc:
  $y_v \vec{u} = y_u \vec{v}$ soit $\vec{u} = \dfrac{y_u}{y_v} \vec{v}$, les vecteurs sont donc colinéaires

Propriété: Les points A, B et C sont alignés $\iff$ $\overrightarrow{AB}$ colinéaire à $\overrightarrow{AC}$.



Propriété: Soient A, B, C et D quatre points. $(AB) \parallel (CD)$ $\iff$ $\overrightarrow{AB}$ colinéaire à $\overrightarrow{CD}$.