Calcul littéral
2nd

Sacha Darthenucq

Prérequis:

- **Vocabulaire ensembliste et logique (2nd)**

1 Calcul avec des nombres fractionnaires

Rappel: Une fraction est la représentation graphique en mathématique de la division. La division de a par b est représentée par la fraction: $\frac{a}{b}$. L'élément du haut s'appelle le numérateur et l'élément du bas s'appelle le dénominateur.

1.1 Rappel : Somme de fractions

Propriété: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

Remarque: Pour additionner deux fractions elles doivent avoir le même dénominateur. Si ce n'est pas le cas, à nous de les mettre sous le même dénominateur.

Astuce: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{d} + \frac{c}{d} \times \frac{b}{b} = \frac{ad+cb}{bd}$

Cela marche toujours mais parfois on peut trouver un dénominateur commun plus simple.

Exemple: $\frac{3}{8} - \frac{5}{12}$

Méthode basique: $\frac{3}{8} - \frac{5}{12} = \frac{3 \times 12}{8 \times 12} - \frac{5 \times 8}{12 \times 8} = \frac{36-40}{96} = \frac{-4}{96} = \frac{-1}{24}$

Méthode plus élégante: $\frac{3}{8} - \frac{5}{12} = \frac{3}{8} \times \frac{3}{3} - \frac{5}{12} \times \frac{2}{2} = \frac{9-10}{12} = \frac{-1}{12}$

1.2 Rappel : Produit de fractions

Propriété: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{ac}{bd}$

Remarque: L'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$. En effet $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1$.

1.3 Division de fraction

Propriété: $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c}$

Démo: $\dfrac{a}{c} = \dfrac{\frac{a}{b} \times b}{\frac{c}{d} \times d} = \dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \times \dfrac{b}{d}$

On multiplie ensuite par $\frac{d}{b}$ de chaque coté:

$\dfrac{a}{c} \times \dfrac{d}{b} = \dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$

Et on peut échanger les deux dénominateurs car on est en multiplication:

$\dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$

Exemple: $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{2}} = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10}$

2 Calcul avec des puissances

2.1 Définitions

Définition: Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$ on définit a^n par $a^n = \overbrace{a \times a \times ... \times a}^{nfois}$
Par convention $a^0 = 1$

Définition: Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$ on définit a^{-n} par $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ avec a^n définit précédemment.

Exemple:

- $7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 49 \times 7 = 343$
- $5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{5 \times 5} = \dfrac{1}{25}$
- $1.6^4 = 1.6 \times 1.6 \times 1.6 \times 1.6 = 6.5536$

2.2 Propriétés

Propriété: $a^n \times a^m = a^{n+m}$ et $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

Propriété: $(a^n)^p = a^{n\times p}$

Propriété: $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ et $(\dfrac{a}{b})^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

2.3 Identités remarquables

Théorème: $a^2 - b^2 = (a-b) \times (a+b)$

Exemple: Résoudre $x^2 = 36$.

$$\begin{aligned} x^2 = 36 &\iff x^2 - 36 = 0 \\ &\iff x^2 - 6^2 = 0 \\ &\iff (x-6) \times (x+6) = 0 \\ x^2 = 36 &\iff x = 6 \textit{ ou } x = -6 \end{aligned}$$

Théorème: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Exemple: Résoudre $x^2 + 8x + 16 = 0$:

$$\begin{aligned} x^2 + 8x + 16 = 0 &\iff x^2 + 2 \times 4 \times x + 4^2 = 0 \\ &\iff (x+4)^2 = 0 \\ &\iff (x+4) = 0 \\ x^2 + 8x + 16 = 0 &\iff x = -4 \end{aligned}$$

Résoudre $4x^2 - 6x + 9 = 0$:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 12x + 9 = 0 &\iff (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 0 \\ &\iff (2x-3)^2 = 0 \\ &\iff (2x-3) = 0 \\ &\iff 2x = 3 \\ 4x^2 - 12x + 9 = 0 &\iff x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

3 Calcul avec des racines carrées

3.1 La fonction racine carrée

Définition: La fonction racine carrée, notée $\sqrt{\ }$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, l'ensemble des réels positifs ou nuls, à valeur dans $\mathbb{R}^+$. Elle associe à tout réel positif ou nul x, l'unique réel positif ou nul y tel que $x = y^2$.

Remarque: Attention $\sqrt{x}$ est unique mais l'équation $y^2 = x$ admet 2 solutions, $y = \sqrt{x}$ ou $y = -\sqrt{x}$.

3.2 Propriétés

Propriété: Soient a et b deux réels positifs ou nuls, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

Démo: $\sqrt{ab}$ est l'unique réel positif ou nul tel que $(\sqrt{ab})^2 = ab$.
$\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est bien positif ou nul et $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2\sqrt{b}^2 = ab$
D'où par unicité de ce réel, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

Propriété: Pour tous a et b réels strictement positifs (c'est à dire positifs mais non nuls), $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Démo: a et b sont positifs donc $a + b < a + 2\sqrt{ab} + b$.
La fonction $\sqrt{\ }$ est une fonction strictement croissante, donc $\sqrt{a+b} < \sqrt{a + 2\sqrt{ab} + b}$.
Pour rappel pour une fonction f strictement croissante, $a < b$ entraîne $f(a) < f(b)$.
On remarque que $a + 2ab + b = \sqrt{a}^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + sqrtb^2$, Identité remarquable
Dons $a + 2\sqrt{ab} + b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$
Ainsi $a + b < (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$, soit $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

4 Rappel : Résolution d'équation

4.1 Rappel : Équation de degré 1

Propriété: L'unique solution de l'équation $ax + b = 0$ est $x = -\dfrac{b}{a}$

4.2 Rappel : Équations produit nul

Théorème: Un produit de deux réels est nul ssi au moins un réel est nul, c'est à dire en prenant a et b deux réels, $a \times b = 0 \iff a = 0$ ou $b = 0$ (la double flèche signifie équivaut à).

Intéret: On ne sait pas au niveau 2nd résoudre en général des équations avec des x^2, mais grâce aux "équations produit nul" on peut en résoudre certaines, notamment grâce aux identités remarquables (voir plus haut).

Exemple: $(x-3)(x+5) = 0 \iff x = 3 ou x = -5$, l'ensemble des solutions est $S = \{-5; 3\}$

Théorème: $\frac{a}{b} = 0 \iff a = 0$ et b $\neq 0$.

Exemple: $\frac{x^2-4}{2x-4} = 0 \iff x^2 - 4 = 0$ et $2x - 4 \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{x^2-4}{2x-4} = 0 &\iff x^2 - 4 = 0 \text{ et } 2x - 4 \neq 0 \\ &\iff (x-2)(x+2) = 0 \text{ et } x \neq 2 \\ &\iff (x = 2 \text{ ou } x = -2) \text{ et } x \neq 2 \\ \frac{x^2-4}{2x-4} = 0 &\iff x = -2 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $\frac{x^2-4}{2x-4} = 0$ est $S = \{2\}$.

5 Inégalités

5.1 Définition et propriété

Définition: Une inégalité en mathématique est un outil permettant de définir des relations d'ordre entre des éléments.

Les différents symboles: $<$ inférieur, $\leq$ inférieur ou égal, $>$ supérieur, $\geq$ supérieur ou égal.

Exemple: $3 < 5$

Propriété: Soit a, b et c des nombres réels tels que $a < b$ et $b < c$, alors $a < c$.

Remarque: Cette propriété reste vraie en remplaçant le symbole $<$ par $\leq$, $>$ ou $\geq$.

5.2 Addition

Propriété: Soit a et b des nombres réels tels que $a < b$. Alors pour tous réel c, $a + c < b + c$.

Remarque: Cette propriété reste vraie en remplaçant le symbole $<$ par $\leq$, $>$ ou $\geq$.

Propriété: Soit a, b, c et d des nombres réels tels que $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$.

Remarque: Cette propriété reste vraie en remplaçant le symbole $<$ par $\leq$, $>$ ou $\geq$.

5.3 Multiplication

Propriété: Soit a et b deux réels tels que $a < b$, soit c un réel strictement positif, alors $a \times c < b \times c$.

Remarque: Cette propriété reste vraie en remplaçant le symbole $<$ par $\leq$, $>$ ou $\geq$.

Propriété: Soit a et b deux réels tels que $a < b$, soit c un réel strictement négatif, alors $a \times c > b \times c$, le sens de l'inégalité change. On dit que multiplier une inéquation par un nombre strictement négatif change le sens de l'inéquation.

Démo: On a $a < b$ donc $(a - b) < 0$. c est un réel négatif or le produit de deux réels négatifs est un réel positif donc:
$(a - b) \times c > 0$, le sens de l'inégalité change.

Remarque: Cette propriété reste vraie en remplaçant le symbole $<$ par $\leq$ qui devient après changement de sens $\geq$, $>$ qui devient après changement de sens $<$, ou $\geq$ qui devient après changement de sens $\leq$.

5.4 Résolution d'inéquations

On résout les inéquations de manière analogue aux équations en isolant la variable (souvent notée x). Cependant dans les équations, les solutions forment souvent un ensemble de quelques valeurs ($S = \{-1; 1\}$) tandis que pour les inéquations les solutions seront des intervalles ou des unions d'intervalles.

Exemple: Résoudre $-5x < 3$

$-5x < 3 \iff -5x \times -\frac{1}{5} > 3 \times \frac{-1}{5}$ Le sens a changé car on a multiplié par un nombre négatif

$-5x < 3 \iff x > \frac{-3}{5}$

L'ensemble des solutions est $S =]-\frac{3}{5}; +\infty[$.