Intervalles et distance
2nd

Sacha Darthenucq

Prérequis:

- **Vocabulaire ensembliste et logique (2nd)**

1 Notions de base sur les intervalles

Pour l'étude des intervalles on se place dans l'ensemble $\mathbb{R}$.

1.1 Intervalle fermé, ouvert, semi-ouvert

Définition: Un intervalle est un ensemble de nombres compris entre deux nombres réels appelés les bornes de l'intervalle. Un intervalle comprend tous les nombres réels compris entre ses bornes.

Définition: Un intervalle est dit fermé lorsque ses bornes sont incluses dans l'ensemble décrit par l'intervalle. Soient a et b les deux bornes de l'intervalle avec a<b, l'intervalle fermé de bornes a et b se note [a;b] et comprend tous les $x \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq x \leq b$.

Définition: Un intervalle est dit ouvert lorsque ses bornes sont exclues de l'ensemble décrit par l'intervalle. Soient a et b les deux bornes de l'intervalle avec a<b, l'intervalle fermé de bornes a et b se note]a;b[et comprend tous les $x \in \mathbb{R}$ tels que a<x<b.

Définition: Un intervalle est dit semi-ouvert lorsque seul une des deux bornes est incluse dans l'ensemble décrit par l'intervalle. Soit a et b les deux bornes de l'intervalle avec a<b, un tel intervalle se note:
- [a;b[si b est exclu de l'ensemble et comprend alors tous les $x \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq x < b$
-]a;b] si a est exclu de l'ensemble et comprend alors tous les $x \in \mathbb{R}$ tels que $a < x \leq b$

Exemple: Considérons l'intervalle I=]-5.7;3.2]. $1 \in I$ $-4 \in I$ $3.2 \in I$ mais $-5.7 \notin I$

1.2 Notations $\pm\infty$

Si on veut décrire un ensemble de nombre de $\mathbb{R}$ il est très commode d'utiliser des intervalles, nous verrons leur coté pratique dans le paragraphe suivant.
Prenons $a \in \mathbb{R}$, comment décrire par exemple, à l'aide d'un intervalle, l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq x$. On ne peut pas prendre une borne $b \in \mathbb{R}$, on va donc utiliser l'infini noté ∞.
Ainsi l'ensemble précédent se note $[a; +\infty[$ c'est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq x$ $(< +\infty)$.

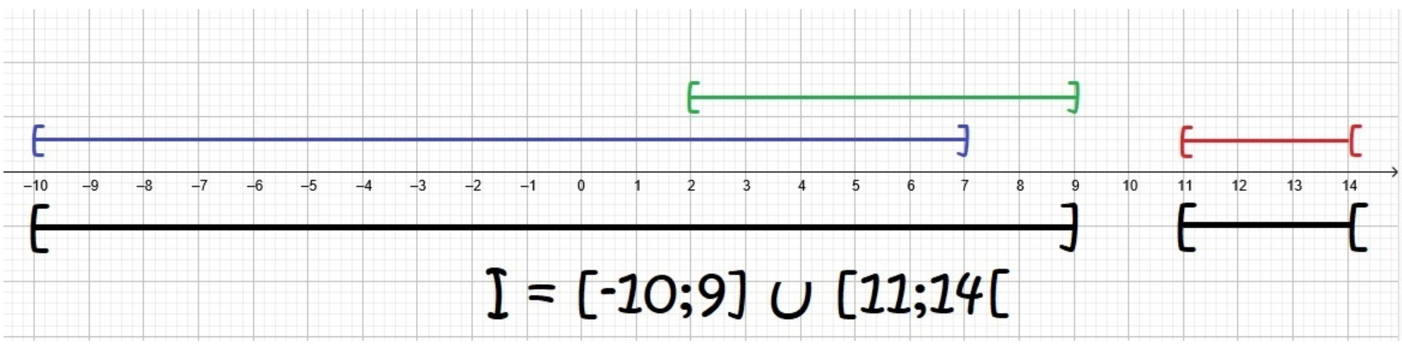
Remarque: On ouvre toujours les crochets de l'intervalle du coté de l'infini ∞ car celui ci n'est pas inclus dans l'intervalle, l'infini n'est pas un nombre réel.

Exemple: L'intervalle $]-\infty;-1[$ correspond à tous les x$\in\mathbb{R}$ tels que x<-1.

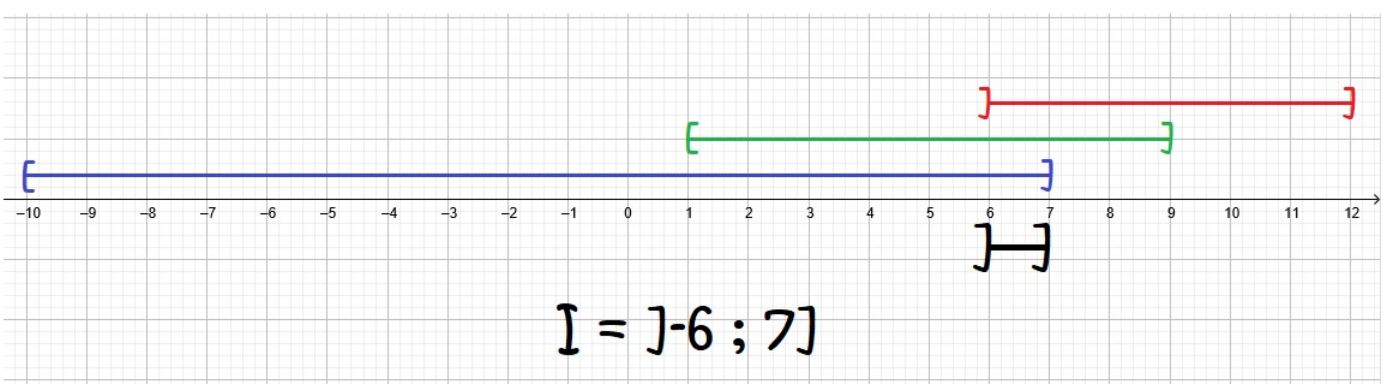
Remarque: $\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$

1.3 Union et intersection d'intervalles

Pour faire des réunions ou des intersection d'intervalles il est commode d'utiliser une représentation graphique à l'aide de la droite des réels.
Pour réaliser une union d'intervalles on représente nos différents intervalles avec des couleurs différentes sur la droite des réels, et l'union de ces intervalles correspond à toute zone colorée.
Exemple: Déterminons $I=[-10;7]\cup[1;9]\cup[11;14[$.



Pour réaliser une intersection d'intervalles on représente nos différents intervalles avec des couleurs différentes sur la droite des réels, et l'intersection de ces intervalles correspond aux zones où toutes les couleurs sont présentes.
Exemple: Déterminons $I=[-10;7]\cap[1;9]\cap]6;12]$.

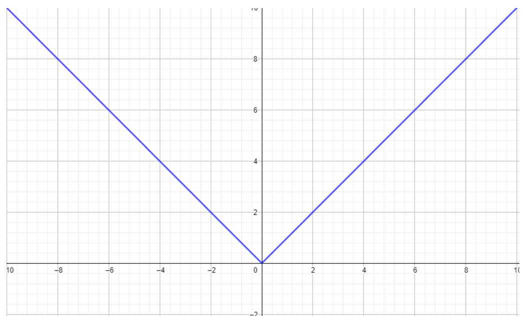


2 Distance

2.1 Fonction valeur absolue

Définition: La fonction valeur absolue est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}^+$, qui correspond à l'ensemble des réels positifs ou nuls. Cette fonction,notée $|\ |$, associe à un réel positif ou nul lui même et à un réel négatif son opposé. $|x| = x$ si $x \geq 0$, $|x| = -x$ si $x < 0$

Représentation graphique:



2.2 Distance

Définition: On définit la distance entre deux nombres réels x et y comme étant $|x - y|$.

Définition: On définit ainsi la largeur d'un intervalle comme étant la distance entre ses 2 bornes.

Exemple: Largeur de l'intervalle $]-15; 6]$?
$|-15 - 6| = |-21| = 21$, la largeur de l'intervalle I est donc 21.

Proposition: L'intervalle $[a - r; a + r]$ est caractérisé par l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $|a - x| \leq r$.

Démo: Si x vérifie $|x - a| \leq r$ montrons que $x \in [a - r; a + r]$:
2 possibilités:

- $x - a \geq 0$ dans ce cas $x \geq a$ et $|x - a| = x - a$.
  Or $|x - a| \leq r$ donc $x - a \leq r$ soit $x \leq a + r$
  Donc $a \leq x \leq a + r$, x appartient bien à l'intervalle.
- $x - a < 0$ dans ce cas $x < a$ et $|x - a| = -(x - a) = a - x$.7
  Or $|x - a| \leq r$ donc $a - x \leq r$ soit $a - r \leq x$
  Donc $a - r \leq x < a$, x appartient bien à l'intervalle.

Si x appartient à l'intervalle alors x vérifie 2 égalités

- $a - r \leq x$ donc $r \leq x - a$
- $x \leq a + r$ donc $x - a \leq r$

On obtient donc $-r \leq x - a \leq r$ ce qui équivaut à $|x - a| \leq r$.