Introduction à l'arithmétique
2nd

Sacha darthenucq

Prérequis:

- **Vocabulaire ensembliste et logique (2nd)**

L'arithmétique est la science des nombres.

1 Les ensembles de nombres

1.1 L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels

Définition: L'ensemble des entiers naturels, noté $\mathbb{N}$, correspond à l'ensemble des **entiers positifs**, $\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}$

Propriété: L'ensemble $\mathbb{N}$ est stable pour l'addition et la multiplication, c'est à dire que si x $\in \mathbb{N}$ et y $\in \mathbb{N}$ alors
x+y $\in \mathbb{N}$ et $x \times y \in \mathbb{N}$

Remarque: $\mathbb{N}$ n'est pas stable pour la soustraction ou la division, 5-8=-3 $\notin \mathbb{N}$ et $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

1.2 L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs

Définition: L'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$, correspond à l'ensemble des entiers positifs et négatifs, $\mathbb{Z}=\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$

Propriété: $\mathbb{Z}$ est stable pour l'addition, la multiplication et la soustraction, mais n'est pas stable pour la division

Propriété: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

1.3 L'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux

Définition: L'ensemble des nombres décimaux, noté $\mathbb{D}$, correspond à l'ensemble des nombres pouvant s'écrire comme un quotient d'un entier relatif par une puissance de 10. Il s'agit de l'ensemble des nombres avec un nombre de chiffres finis après la virgule.

Exemple: $123.45 = \dfrac{12345}{100} = \dfrac{12345}{10^2} \in \mathbb{D}$

Propriété: $\mathbb{D}$ est stable pour l'addition, la multiplication et la soustraction, mais pas pour la division (on le verra plus tard dans le cours)

Propriété: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$

Démo: Soit $x \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{x}{1} = \frac{x}{10^0}$

Remarque: La partie entière d'un nombre décimal correspond au nombre qui se trouve avant la virgule, la partie décimale correspond au nombre qui se trouve après la virgule

Exemple: $partieentiere(123.45) = 123$ et $partiedecimale(123.45) = 0.45$

Définition: L'écriture scientifique d'un nombre décimal correspond à l'écriture de ce nombre sous la forme du produit d'un entier avec une puissance de 10.

Exemple: L'écriture scientifique de 42 est 4.2×10, celle de 0.0547 est 5.47×10^{-2}.

Définition: Dans l'écriture d'un nombre décimal, le nombre de chiffres après la virgule s'appelle le nombre de chiffres significatifs.

Exemple: L'écriture scientifique de $156,489567$ avec 2 chiffres significatifs est 1.56×10^2, avec 5 chiffres significatif c'est 1.56489×10^2.

1.4 L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels

Définition: L'ensemble des nombres rationnels, noté $\mathbb{Q}$, correspond à l'ensemble des nombres quotient d'un entier relatif par un entier non nul. Ainsi si $x \in \mathbb{Q}$ alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$ avec $q \neq 0$ tels que $x = \dfrac{p}{q}$

Exemple: $\dfrac{3}{7} \in \mathbb{Q}$

Propriété: $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

Démo: Soit $x \in \mathbb{D}$ alors $x = \dfrac{p}{10^n} \in \mathbb{Q}$ car $p \in \mathbb{Z}$ et $10^n \in \mathbb{N}$ et $10^n \neq 0$

Propriété: $\mathbb{Q}$ est stable pour l'addition, la multiplication, la soustraction. Il est aussi stable pour toute division différente de 0.

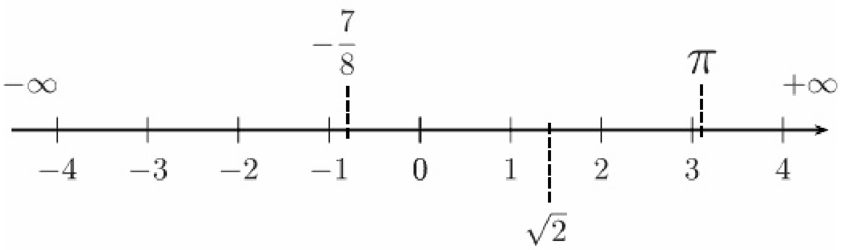
Propriété: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ on dit que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démo: Nous l'aborderons après avoir abordé la notion de diviseurs et de nombres premiers.

1.5 L'ensemble $\mathbb{R}$ des réels

Définition: L'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$, correspond à l'ensemble des abscisses d'une droite graduée d'origine 0. Plus simplement il s'agit de l'ensemble des nombres qui existent dans la réalité.

La droite des réels:



Propriété: $\mathbb{R}$ est stable pour l'addition, la multiplication, la soustraction et la division (différente de 0).

Propriété: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ mais $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$, on le verra en montrant que $\sqrt(2) \notin \mathbb{Q}$

2 Notions arithmétiques élémentaires

On se place dans $\mathbb{Z}$

2.1 Multiple, diviseur

Définition: Soit $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$. On dit que m est un multiple de a ssi il existe $b \in \mathbb{Z}$ tel que $m = a \times b$

Exemple: 12 est un multiple de 6 car 12 = 6×2

Propriété: Soit $a \in \mathbb{Z}$. La somme de deux multiple de a est un multiple de a.

Démo: Soit n et m deux multiples de a. Il existe $b_n \in \mathbb{Z}$ et $b_m \in \mathbb{Z}$ tels que $ab_n = n$ et $ab_m = m$.
Donc $n + m = ab_m + ab_n = a(b_m + b_n)$.
Or $\mathbb{Z}$ est stable pour l'addition donc $(b_m + b_n) \in \mathbb{Z}$
Donc n+m multiple de a

Définition: Soit $a \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{Z}$. On dit que d est un diviseur de a ssi il existe $b \in \mathbb{Z}$ tel que $a = d \times b$

Exemple: 12 admet 1,2,3,4,6,12 ainsi que -1,-2,-3,-4,-6,-12 comme diviseurs (ne pas oublier les négatifs)

Exemple: 12 n'admet pas 5 comme diviseur car $12 = 5 \times 2.4$ et $2.4 \notin \mathbb{Z}$

2.2 Parité, imparité

Définition: Soit a $\in \mathbb{Z}$. On dit que a est pair ssi a est un multiple de 2 ce qui équivaut aussi à dire que 2 est un diviseur de a. Dans ce cas il existe n $\in \mathbb{Z}$ tel que a = 2n

Définition: Soit a $\in \mathbb{Z}$. Si a n'est pas pair on dit que a est impair. Dans ce cas il existe n $\in \mathbb{Z}$ tel que a = 2n+1

Propriété: Le produit d'un entier relatif quelconque avec un nombre pair est pair.

Démo: Soit a $\in \mathbb{Z}$ un entier relatif quelconque et $p \in \mathbb{Z}$ un entier relatif pair.
Alors il existe n $\in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2n$.
Donc $ap = a \times 2n = 2 \times an$.

Or $\mathbb{Z}$ est stable pour la multiplication donc $an \in \mathbb{Z}$
ap admet donc 2 comme diviseur, ap est pair.

Conséquence: Le carré d'un nombre pair est pair.

Propriété: Le produit de deux entiers relatifs impairs est impair.

Démo: Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ impairs, alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que $a = 2n+1$, $b = 2m+1$.

$$\begin{aligned} ab &= (2n+1) \times (2m+1) \\ &= 4nm + 2n + 2m + 1 \\ ab &= 2(2nm + n + m) + 1 \end{aligned}$$

ab est de la forme 2 $\times$ (quelque chose) + 1 donc ab est impair.

Conséquence: Le carré d'un nombre impair est impair.

2.3 Nombre premier

Définition: On dit qu'un entier relatif est premier ssi il admet exactement 2 diviseurs. Dans ce cas ses diviseurs sont 1 et lui même.

Exemple: 2,3,5,7,11 sont premiers. 4 n'est pas premier car il admet 3 diviseurs (1,2 et 4).

Remarque: 1 n'est pas premier car il n'admet qu'un seul diviseur.

Définition: Un entier relatif d est dit diviseur commun de deux entiers relatifs a et b ssi d divise a et d divise b

Définition: 2 entiers relatifs sont dits premiers entre eux s'ils n'admettent que 1 comme diviseur commun.

Exemple: 4 et 9 sont premiers entre eux bien qu'ils soient pas des nombres premiers.

Définition: Une fraction d'entiers relatifs est dite irréductible si le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux.

Propriété: Toute fraction d'entiers relatifs peut se mettre sous forme irréductible.

Remarque: Pour mettre une fraction sous forme irréductible on enlève progressivement les diviseurs communs du numérateur et du dénominateur.
Exemple: $\frac{75}{45} = \frac{5 \times 15}{5 \times 9} = \frac{15}{9} = \frac{3 \times 5}{3 \times 3} = \frac{5}{3}$
$\frac{5}{3}$ est la forme irréductible de la fraction $\frac{75}{45}$.

Proposition: $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal, cela va donc montrer entre autre que $\mathbb{D}$ n'est pas stable pour la division.

Démo: Nous allons utiliser un raisonnement par l'absurde.
Si $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$.
Donc $10^n = 3a$, d'où 3 divise 10^n
2 possibilités:
-On sait depuis la sixième qu'un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3. Pour 10^n la somme de ses chiffres vaut 1 qui n'est pas un multiple de 3 donc 3 ne divise pas

10^n, on arrive à une contradiction.

-On effectue la division euclidienne de 10^n par 3, 10^n=3 $\times$ $\overbrace{3...3}^{n-1\ fois}$ $+1$. Le reste de la division euclidienne de 10^n par 3 est 1 qui est non nul, donc 3 ne divise pas 10^n. Contradiction.
Donc $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$

Proposition: $\sqrt(2)$ est irrationnel c'est à dire $\sqrt(2) \notin \mathbb{Q}$.

Démo: On raisonne par l'absurde.
Supposons $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Il existe donc $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$ avec $q \neq 0$ tels que
$sqrt(2) = \frac{p}{q}$ fraction sous forme irréductible, p et q n'ont pas de diviseur commun.
On élève au carré
$2 = \frac{p^2}{q^2}$

$$2q^2 = p^2$$

2 divise p^2 or on a vu précédemment que le carré d'un nombre impair est impair.
Or le carré de p est divisible par 2 donc pair, d'où p est pair.
Il existe $p' \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2p'$

$$\begin{aligned} 2q^2 &= (2p')^2 \\ 2q^2 &= 4(p')^2 \\ q^2 &= 2(p')^2 \end{aligned}$$

Même raisonnement, 2 divise q^2, ..., donc q est pair.
q est donc divisible par 2.
Recap: On a vu que p et q étaient divisibles par 2, ils ont donc un diviseur commun différent de 1.
Or la fraction était sous forme irréductible, donc p et q n'ont pas de diviseur commun.
On arrive donc à une contradiction.
$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Remarque: $\sqrt{2}$ est un nombre réel qui correspond à la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle dont la longueur des 2 autres cotés vaut 1.
$\sqrt{2}$ est donc un nombre réel. On a donc bien montré $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$

2.4 Approximation des réels par les décimaux

L'objectif de ce paragraphe est de pouvoir approximer un nombre réel, en l'encadrant avec des nombres décimaux.
L'idée est simple, tout nombre réel positif x vérifie:

$$partieentiere(x) \leq x \leq partieentiere(x) + 1$$

En effet prenons $x = 1.3333333333...$:
$partieentiere(x) = 1$ et $partieentiere(x) + 1 = 2$ et on a bien $1 \leq x \leq 2$
La *partie entiere* enlève ce qui est après la virgule, donc notre réel positif est toujours plus grand.

Mais ce qui est après la virgule est toujours plus petit que 1 donc le réel positif x est plus petit que $partientire(x)+1$

Le premier encadrement que nous avons réalisé est assez gros, son amplitude est 1 (on soustrait les deux extrémités de l'encadrement).

On peut être plus précis en remarquant l'encadrement suivant pour tout réel x positif:

$$\frac{partieentiere(x \times 10^n)}{10^n} \leq x \leq \frac{partieentiere(x \times 10^n)+1}{10^n}$$

On arrive à ce résultat de la manière suivante en reprenant le premier encadrement pour le réel positif $x \times 10^n$:

$$partieentiere(x \times 10^n) \leq x \times 10^n \leq partieentiere(x \times 10^n)+1$$

Puis on divise par 10^n

On a ainsi un encadrement aussi précis qu'on le souhaite car son amplitude est $\dfrac{1}{10^n}$

Et pour les réels négatifs ?

Soit x un réel négatif, $-x$ est un réel positif: on encadre $-x$ puis on multiplie par -1 l'encadrement (ce qui inverse les bornes) et le tour est joué.