Résolution d'un système
2nd

Sacha Darthenucq

On va résoudre ici des systémes de deux équations à deux inconnues, mais la méthode se généralise à tous les systèmes.
On considère le système $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$
Ici les inconnues sont x et y, a,b,c,d,e,f étant des réels quelconques, avec au moins un des réels a,b,c,d non nuls, sinon il n'y a pas de système.
Il existe deux méthodes pour résoudre un tel système, a vous de faire votre choix, mais la deuxième méthode est plus "propre".

1 Méthode de substitution

Cette méthode consiste à exprimer une inconnue en fonction de l'autre dans une équation, puis la remplacer dans l'autre équation pour obtenir une équation à 1 inconnue.
Considérons $a \neq 0$:

$$\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{e-by}{a} \\ cx+dy=f \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=\dfrac{e-by}{a} \\ c\times\dfrac{e-by}{a}+dy=f \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=\dfrac{e-by}{a} \\ ce-bcy+ady=fa \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=\dfrac{e-by}{a} \\ y(ad-bc)=fa-ce \end{cases}$$

si $ad-bc \neq 0$

$$\iff \begin{cases} x=\dfrac{e-by}{a} \\ y=\dfrac{fa-ce}{ad-bc} \end{cases}$$

On a obtenu l'expression de y puis en la remplacant dans la première équation du système on obtient x

si $ad-bc=0$

si $fa-ce \neq 0$ le sytème n'est pas résoluble

si $fa-ce=0$ Le sytème admet une infinité de solutions

Remarque: Au lycée, si vous arrivez dans le cas irrésoluble ou infinité de solutions, il est fortement probable que vous ayez mal posé votre système ou que votre résolution soit fausse. Il se peut aussi qu'en arrivant au cas irrésoluble ou infinité de solution, ce que vous essayez de démontrer s'avère faux.

Exemple:

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 2x-3y=4 \\ 9x+5y=6 \end{cases} &\iff \begin{cases} x=\dfrac{4+3y}{2} \\ 9x+5y=6 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x=\dfrac{4+3y}{2} \\ 9\times\dfrac{4+3y}{2}+5y=6 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x=\dfrac{4+3y}{2} \\ 9\times(4+3y)+10y=12 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x=\dfrac{4+3y}{2} \\ 36+27y+10y=12 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x=\dfrac{4+3y}{2} \\ 37y=-24 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x=\dfrac{4+3y}{2} \\ y=-\dfrac{24}{37} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x=\dfrac{4+3\times-\dfrac{24}{37}}{2} \\ y=-\dfrac{24}{37} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x=\dfrac{\dfrac{148-72}{37}}{2} \\ y=-\dfrac{24}{37} \end{cases} \\
\begin{cases} 2x-3y=4 \\ 9x+5y=6 \end{cases} &\iff \begin{cases} x=\dfrac{76}{74} \\ y=-\dfrac{24}{37} \end{cases}
\end{aligned}$$

2 Méthode des combinaisons linéaires

Cette méthode consiste à a additionner ou soustraire plusieurs fois une équation à une autre, et ce membre à membre afin de faire disparaitre une des inconnues dans une equations et donc de résoudre facilement le système.
Considérons $a \neq 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} ax+by=e \\ cx+dy=f \qquad -\dfrac{c}{a}\times \ (ax+by=e) \text{ on va faire dipsaraitre les x} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} ax+by=e \\ cx+dy \ -\dfrac{c}{a}\times(ax+by)=f \ -\dfrac{c}{a}\times e \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} ax+by=e \\ cx+dy-cx-\dfrac{bc}{a}y=\dfrac{af-ce}{a} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{e-by}{a} \\ ady-bcy=af-ce \end{array}\right.$$

On retombe sur le système que l'on a vu avant.
Mais alors quel est sont intérêt ?
Ici on a vu avec des lettres quelconque, donc ça ne semble pas si génial, mais vous allez voir dans l'exemple suivant que dans bien des cas cela est plus simple que la méthode par substitution.

Exemple:

$$\left\{\begin{array}{l} 5x+3y=2 \\ 4x+17y=-9 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 5x+3y=2 \\ 4x+17y=-9 \quad <- \quad 5\times(4x+17y=-9)\ -4\times(5x+3y=2) \end{array}\right.$$

cette combinaison linéaire des 2 éq. va supprimer les x

$$\iff \left\{\begin{array}{l} 5x+3y=2 \\ 5\times(4x+17y)-4\times(5x+3y)=5\times(-9)\ -\ 4\times 2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} 5x+3y=2 \\ 20x+85y-20x-12y=-45-8 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} 5x+3y=2 \\ 73y=-53 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{2-3y}{5} \\ y=-\dfrac{53}{73} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{2-3\times\left(-\dfrac{53}{73}\right)}{5} \\ y=-\dfrac{53}{73} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{\dfrac{146+159}{73}}{5} \\ y=-\dfrac{53}{73} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 5x+3y=2 \\ 4x+17y=-9 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{305}{365}=\dfrac{61}{73} \\ y=-\dfrac{53}{73} \end{array}\right.$$