Évolutions de quantités
2nd

Sacha Darthenucq

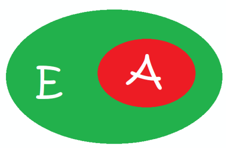
Prérequis:

- **Vocabulaire ensembliste et logique (2nd)**

1 Proportion et pourcentage

1.1 Proportion d'une partie par rapport à un ensemble

Définition: Soit E un ensemble, A une partie de E. Notons n_E le nombre d'éléments de E et n_A le nombre d'éléments de A. La proportion des éléments de A par rapport à E est le quotient $p = \frac{n_A}{n_E}$.



Exemple: Soit une classe de 35 élèves se composant de 15 garçons et 20 filles.
Quelle est la proportion de garçons dans la classe ?
Ici E: "l'ensemble des élèves de la classe", $n_E = 35$, A: "l'ensemble des garçons de la classe",$n_A = 15$.
La proportion de garçons dans la classe est donc $p = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$.

Définition: Un pourcentage correspond à une proportion dont le dénominateur vaut 100.

Vocabulaire: Soit E un ensemble et A une partie de E, telle que la proportion des éléments de A par rapport à E soit égale à $p = \frac{x}{100}$. On dit alors que les éléments de A représentent x pour cent (noté %) des éléments de E.

Exemple: Reprenons l'exemple précédent, $p = \frac{3}{7} \simeq \frac{43}{100}$, les garçons représentent environ 43% des élèves de la classe.

Propriété: Calculer x% d'une quantité n correspond à multiplier n par $\frac{x}{100}$.

Démo: Soit E un ensemble de n_E éléments. On cherche à calculer combien d'éléments de E représente x%.
On cherche donc m tel que $\frac{m}{n} = \frac{x}{100}$ donc $m = n \times \frac{x}{100}$.

Exemple: Reprenons l'exemple précédent, le nombre d'élèves que représente 60% des élèves de la classe.
$35 \times \dfrac{57}{100} = 20$, 20 élèves de la classe représentent 57% des effectifs de la classe, donc les filles représentent 57% des élèves de la classe.

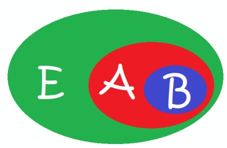
Remarque: 100% représente la totalité des éléments de l'ensemble. Dans notre exemple les "étudiants" représentent 100% des effectifs de la classe.

Propriété: Pour passer d'une proportion p à une écriture en $x\%$ il suffit de multiplier p par 100.

Démo: $p = \dfrac{x}{100}$ donc $x = p \times 100$.

1.2 Proportion échelonnées

Propriété: Soit E un ensemble, A une partie de E dont la proportion des éléments de A par rapport à E vaut p. Soit B une partie de A dont la proportion d'éléments par rapport à A vaut q. Alors la proportion des éléments de B par rapport à E vaut $p \times q$.



Démo: On a deux égalités $\dfrac{n_A}{n_E} = p$ et $\dfrac{n_B}{n_A} = q$,
Donc $n_A = n_E \times p$ et $n_B = q \times n_A$, on remplace n_A,
Ainsi $n_B = n_E \times p \times q$, on divise tranquillement par n_E,
Soit $\dfrac{n_B}{n_E} = p \times q$.

Exemple: J'ai utilisé la moitié du quart de ma cartouche d'encre. J'ai donc au total utilisé $\dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4}$ de ma cartouche d'encre.

2 Évolution

2.1 Pourcentage d'évolution

Définition: Soit une quantités n_i qui évolue jusqu'à une quantité n_f. On appelle taux d'évolution le quotient $t = \dfrac{n_f - n_i}{|n_i|}$, $|\ |$ correspondant à la valeur absolue.

Définition: De la même manière que précédemment, on définit le pourcentage d'évolution comme étant le nombre p tel que $t = \dfrac{p}{100}$. Ainsi on a $p = t \times 100$.

Exemple: Suite à une épidémie, le prix moyen d'un kilogramme de fruit est passé de 3.6 € à 4.1 €.
Calcul du taux d'évolution:
$t = \dfrac{4.1 - 3.6}{3.6} \simeq 0.139$
Calcul du pourcentage d'évolution:
$p = t \times 100 = 13.9$
Le prix des fruits à donc en moyenne augmenté de 13.9% à cause de l'épidémie.

Remarque: Lorsque l'on trouve p négatif (ou t négatif) cela veut dire que la quantité à diminuée. Par exemple pour $p = -15$, on dira: la quantité à diminué de 15%.

2.2 Coefficient multiplicateur

Définition: Soit une quantité n_i évoluant jusqu'à une quantité n_f. Le coefficient multiplicateur de l'évolution est le nombre C tel que $n_i \times C = n_f$. Ce coefficient vaut donc $C = \dfrac{n_f}{n_i}$.

Propriété: Lors d'une évolution de quantité $C = (1 + t)$.

Démo: $C = \dfrac{n_f}{n_i}$ on fait une décomposition dite "idiote":
$C = \dfrac{(n_f - n_i) + n_i}{n_i} = \dfrac{n_f - n_i}{n_i} + 1 = t + 1.$

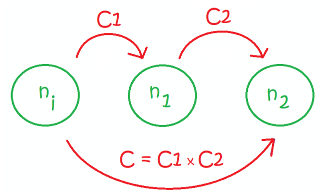
Propriété:

- Lorsqu'une quantité subit une augmentation de $p\%$ le coefficient multiplicateur de l'évolution vaut $C = \left(1 + \dfrac{p}{100}\right)$,
- Lorsqu'une quantité subit une diminution de $p\%$ le coefficient multiplicateur de l'évolution vaut $C = \left(1 - \dfrac{p}{100}\right)$

Démo: $t = \dfrac{p}{100}$, p devient négatif lors d'une diminution d'où le signe "$-$".

2.3 Évolutions successives

Propriété: Lorsque une quantité subit m évolutions successives, le coefficient multiplicateur total de l'évolution correspond au produit des coefficient multiplicateur de chacune des évolutions.



Démo: On considère une quantité n_1 qui évolue successivement vers une quantité n_2 puis n_3 puis ... n_m, cette quantité subit $m-1$ évolutions:
$C = \frac{n_m}{n_1} = \frac{n_m}{n_1} \times \frac{n_{m-1}}{n_{m-1}} \times ... \times \frac{n_2}{n_2}$
On décale chaque dénominateur de 1 cran vers la gauche:
$C = \frac{n_m}{n_{m-1}} \times \frac{n_{m-1}}{n_{m-2}} \times ... \times \frac{n_3}{n_2} \times \frac{n_2}{n_1}$
$C = C_{m-1} \times C_{m-2} \times ... \times C_2 \times C_1$.

Exemple: Le prix d'un article augmente de 10% puis diminue de 5% puis augment de nouveau de 4%. Quelle est l'augmentation (ou diminution) totale du prix de l'article par rapport à son prix initial?
$C = C_1 \times C_2 \times C_3 = \left(1 + \frac{10}{100}\right) \times \left(1 - \frac{5}{100}\right) \times \left(1 + \frac{4}{100}\right) \simeq 1.087.$
Or $C = 1 + \frac{p}{100}$ d'où $p = 0.087$, l'augmentation totale est de 8.7%.

2.4 Évolution réciproque

Définition: Soit une quantité n_i qui à évolue jusqu'à une quantité n_f. L'évolution réciproque de la première évolution correspond à l'évolution qui transforme la quantité n_f en la quantité n_i. Deux évolutions sont donc dites réciproques si le coefficient multiplicateur global des deux évolutions vaut 1.

Propriété: Soit une évolution de coefficient multiplicateur C_1. L'évolution réciproque à comme coefficient multiplicateur $C_2 = \frac{1}{C_1}$

Démo: $C_1 \times C_2 = 1$ donc $C_2 = \frac{1}{C_1}$.