Probabilités et échantillonnage
2nd

Sacha Darthenucq

Prérequis:

- **Vocabulaire ensembliste et logique (2nd) !**
  Si vous ne le maîtrisez pas, vous ne comprendrez rien à ce cours.

J'ai choisis pour ce chapitre d'être un peu plus théorique que le programme officiel, car le chapitre de probabilité est relativement simple, à condition de comprendre ce que l'on fait. J'espère donc que mon approche plus théorique vous permettra d'avoir une solide compréhension des probabilités et des évènements.

1 Vocabulaire

1.1 Expérience aléatoire

Définition: Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat ne peut être connu à l'avance, et qui, répétée dans des conditions identiques, ne donne pas toujours le même résultat.

Définition: L'ensemble des résultats (ou issues) d'une expérience aléatoire s'appelle l'univers. Il est noté Ω.

Exemple: Le lancé d'un dé non pipé à 6 faces est une expérience aléatoire. L'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ car le résultat du lancé d'un dé à 6 faces est 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

1.2 Évènement

Définition: On appelle évènement toute partie de l'univers Ω.

Exemple: Dans l'exemple précédent $A = \{1; 2\}$ est un évènement qui correspond à: "le résultat est 1 ou 2".

Remarque: Puisque l'on décrit l'univers et les évènements par des ensembles, on va pouvoir réaliser des unions et intersections d'évènements, et définir des évènements complémentaires.

Remarque essentielle: Il est primordial de jongler avec les évènement entre description sous forme d'ensembles et description sous forme de phrases.
Il faut retenir que $E = \{a; b\} = \{a\} \cup \{b\}$, que $\{\omega\}$ se lit "le résultat est ω", $\cup$ se lit "ou" et $\cap$ se lit "et". On pourra donc faire des unions et intersections d'évènements.
Ainsi l'évènement "A ou B" correspond à $A \cup B$ et l'évènement "A et B" à $A \cap B$.

Exemple: Reprenons l'exemple du dé. Soit un évènement $A = \{2; 4; 6\}$ ="le résultat est paire" et un évènement $B = \{1; 2\} = \{1\} \cup \{2\}$ ="le résultat est 1 ou 2"

- $A \cup B = \{2; 4; 6\} \cup \{1; 2\} = \{1; 2; 4; 6\}$ ="(le résultat est paire) ou (le résultat est 1),
- $A \cap B = \{2; 4; 6\} \cap \{1; 2\} = \{2\}$ ="le résultat est 2".

Définition: On appelle évènement élémentaire tout évènement ne comportant qu'une seule issue. On appelle donc évènement élémentaire tout ensemble formé par 1 seul élément de Ω.

Exemple: Dans l'exemple du dé, $\{4\}$ est un évènement élémentaire qui correspond à: "le résultat du dé est 4"

Définition: Soient A et B deux évènements. On dit que A et B sont incompatibles si $A \cap B = \varnothing$.

Remarque: L'évènement $\varnothing$ est appelé l'évènement impossible.

Exemple: Reprenons l'exemple du dé, les évènements "le résultat est paire" ($\{2; 4; 6\}$) et "le résultat est impaire" ($\{1; 3; 5\}$) sont incompatibles.
En effet $\{2; 4; 6\} \cap \{1; 3; 5\} = \varnothing$

Définition: On appelle évènement contraire de A l'évènement $\bar{A}$, définit de la même manière que l'évènement complémentaire avec les ensembles.

Exemple: L'évènement complémentaire de A ="le résultat est paire"$= \{2; 4; 6\}$ est $\bar{A}$ ="le résultat est impaire"$= \{1; 3; 5\}$.

2 Probabilités sur un univers fini

2.1 Loi de probabilité

Définition: Une probabilité est une fonction notée p définit par $p \begin{cases} \text{ensemble des évènements} \to [0; 1] \\ A \mapsto p(A) \end{cases}$
telle que $p(\Omega) = 1$ et telle que pour $A \cap B = \varnothing$, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Définition: Une loi de probabilité est une règle qui définit la fonction de probabilité p.

Exemple: Dans le cas d'un lancé de dé, notre loi de probabilité associe au lancé de dé la fonction p qui associe à tout évènement élémenatire la probabilité $\frac{1}{6}$.
Ainsi $p(\{3\}) = \frac{1}{6}$,
$p(\{1; 2\}) = p(\{1\} \cup \{2\})$ or $\{1\} \cap \{2\} = \varnothing$, donc $p(\{1; 2\}) = p(\{1\}) + p(\{2\}) = \frac{2}{6}$.

Définition: On dit qu'une loi est équiprobable lorsque tous les évènements élémentaires ont la même probabilité de se réaliser, dans ce cas: $p(\{w\}) = \frac{1}{\text{nombres d'évènements élémentaires de } \Omega}$ avec $\{\omega\}$ un évènement élémentaire.

Exemple: Lors du lancé d'une pièce ou d'un dé à 6 faces on est en situation d'équiprobabilité.

2.2 Calcul de Probabilités

Propriété: La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le composent.

Démo: Soit un évènement $A = \{w_1; ...; w_p\} = \{w_1\} \cup ... \cup \{w_p\}$,
$p(A) = p(\{w_1\} \cup ... \cup \{w_p\}) = p(\{w_1\}) + ... + p(\{w_p\})$, car $\{w_i\} \cap \{w_j\} = \varnothing$ pour $i \neq j$.

Théorème: Pour tout évènement A et B, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

2.3 Succession d'épreuves

Définition: Soit une expérience aléatoire répétée deux fois. Soit A un évènement concernant la première répétition, et B un évènement concernant la deuxième répétition. On dit que A et B sont indépendants si la réalisation de l'évènement A n'affecte pas la réalisation de l'évènement B.

Exemple: Prenons l'exemple du lancé répété deux fois d'une pièce de monnaie. L'événement A="le résultat du premier lancer est face" et l'évènement B="le résultat du second lancé est pile" sont indépendants. En effet que le résultat du premier lancé soit pile ou face n'influe pas sur le second lancé.

Théorème: Pour deux évènements A et B indépendants, $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Exemple: Considérons 3 lancers d'une pièce de monnaie. Je veux calculer la probabilité de l'évènement E ="j'obtiens pile au premier lancer puis face au second puis encore face au troisième". Je considère les évènements A="j'obtient pile au premier lancer", B="j'obtient face au second lancer" et C="j'obtiens face au troisième lancer".
$E = A \cap B \cap C$ et les évènements A,B et C sont indépendants, donc:
$p(E) = p(A) \times p(B) \times p(C) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$.