Combinatoire et dénombrement
Terminale

Sacha Darthenucq

Prérequis:

- **Vocabulaire ensembliste et logique (term)**

1 Dénombrement usuels

1.1 Définition

Définition: Soit E un ensemble, nous appelons cardinal de E noté $Card(E)$ ou $\#E$ le nombre d'éléments de l'ensemble E.

Remarque: Par convention $Card(\varnothing) = 0$.

Définition: Un ensemble E est dit fini s'il admet un cardinal fini.

Le dénombrement consiste à déterminer le cardinal d'un ensemble fini.

1.2 Principe additif

Théorème: Soit E et F deux ensembles finis tels que $E \cap F = \varnothing$, c'est à dire E et F disjoints. Alors $\#E \cup F = \#E + \#F$.

Démo: $E \cup F$ se compose des éléments de E ainsi que des éléments de F. De plus comme ils n'en ont aucun en commun, nous avons immédiatement, $\#E \cup F = \#E + \#F$.

Conséquence: Soit $E_1, ..., E_n$ des ensembles finis deux à deux disjoints, c'est à dire que pour $i \neq j$, $E_i \cap E_j = \varnothing$. Alors $\#(E_1 \cup \ldots \cup E_n) = \#E_1 + \ldots + \#E_n$.

Remarque: Mathématiquement nous notons $\# \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \#E_i$

1.3 Principe multiplicatif

Définition: Soit E et F deux ensembles finis, nous appelons produit cartésien de E et F l'ensemble $E \times F$ composé des couples (e, f), ou 2-uplets, avec $e \in E$, $f \in F$.
$E \times F = \{(e, f), \text{avec } e \in E, f \in F\}$.

Exemple: Pour $E = \{1; 2; 3\}$, $F = \{a; b\}$, nous avons $E \times F = \{(1; a), (1; b), (2; a), (2; b), (3; a), (3; b)\}$.

Définition: Nous pouvons bien sûr étendre le produit cartésien à n ensembles. Ainsi le produit cartésien de $E_1, \ldots, E_n$ correspond à l'ensemble des n-uplets formé d'éléments de $E_1, \ldots, E_n$.
$E_1 \times \ldots \times E_n = \{(e_1, \ldots, e_n), \text{avec } e_i \in E_i\}$.

Définition: $E^p = \underbrace{E \times \ldots \times E}_{p \text{ fois}}$.

Théorème: Soit E et F deux ensembles finis, alors $\#(E \times F) = \#E \times \#F$.

Démo: $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ et $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$.
Notons $e_iF = \{(e_i, f), f \in F\}$.
Nous avons $\#e_iF = \#F$.
Nous avons également donc $E \times F = \bigcup_{i=1}^{n} e_iF$ et pour $i \neq j, e_iF \cap e_jF = \varnothing$.
Par principe additif $\#E \times F = \sum_{i=1}^{n} \#e_iF = \sum_{i=1}^{n} \#F = n\#F = \#E\#F$.

Conséquence: $\#(E_1 \times \ldots \times E_n) = \#E_1 \times \ldots \times \#E_n$.

Conséquence: $\#E^p = (\#E)^p$.

1.4 Parties d'un ensemble

Définition: Soit E un ensemble, une partie de E est un sous-ensemble de E.

Définition: L'ensemble des parties de E correspond à l'ensemble formé par la collection de toutes les parties de E, il est noté $P(E)$.

Exemple: Soit $E = \{1; 2; 3\}$, $P(E) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1; 2\}, \{1; 3\}, \{2; 3\}, \{1; 2; 3\}\}$.

Proposition: $\#P(E) = 2^n$ avec $n = \#E$.

Démo: Soit $E = \{e_1; \ldots; e_n\}$, nous associons à chaque partie P de E un unique n-uplet de $\{0; 1\}$ de la manière suivante:
Si $e_i \in P$, alors nous mettons un 1 en position i du n-uplet, sinon nous mettons un 0.
Ainsi à chaque partie P de E nous pouvons associer un unique n-uplet de $\{0; 1\}$ et à chaque n-uplet de $\{0; 1\}$ est associé une unique partie P de E.
Donc $\#P(E) = \#(\{0; 1\}^n) = (\#\{0; 1\})^n = 2^n$.

Définition: Pour $k \leq n$, l'entier $\binom{n}{k}$ correspond au nombre de parties à k éléments de E.

Conséquence: $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Démo: Notons $P_k(E)$ l'ensemble des parties à k éléments de E.
$P(E) = \bigcup_{k=1}^{n} P_k(n)$ et pour $k \neq k'$, $P_k(E) \cap P_{k'}(E) = \varnothing$.
D'où $\#P(E) = \sum_{k=1}^{n} \#P_k(E)$, soit $2^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$.

2 Arrangements et permutations

2.1 Factorielle

Définition: Soit n un entier naturel, $n \in \mathbb{N}$, nous appelons factorielle de n l'entier naturel $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$.

Remarque: Par convention $0! = 1$.

Exemple: $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

2.2 Arrangements

Définition: Soit E un ensemble fini de cardinal n, soit $p \leq n$. Un arrangement à p éléments de E est un p-uplet d'éléments distincts de E.

Exemple: $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; a; b\}$, le 5-uplet $(5; 1; a; 6; b)$ est un arrangement à 5 éléments de E.

Remarque: Dans un arrangement l'ordre des éléments compte. Ainsi l'arrangement $(5; 1; a; 6; b)$ est différent de l'arrangement $(6; 5; b; a; 5)$.

Proposition: Soit E un ensemble de cardinal n. Le nombre d'arrangements possibles à p éléments de E vaut $n \times (n-1) \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Démo: Comptons le nombre de p-uplets possibles.
Pour le premier élément de p-uplet n possibilités s'offrent à nous.
Pour le deuxième élément du p-uplet, comme les éléments doivent être distincts, il ne nous reste plus que $n-1$ possibilités.
Et ainsi de suite jusqu'au p-ième élément où il ne nous reste que $n-p+1$ possibilités.
Il y a donc $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)$ différents p-uplets de E.

2.3 Permutations

Définition: Soit E un ensemble de cardinal n. Une permutation de E est un arrangement à n éléments de E.

Exemple: Soit $E = \{a; b; c; d; e\}$, $\sigma = \{c; a; e; d; b\}$ est une permutation de E.

Proposition: Soit E un ensemble de cardinal n, le nombre de permutation de E vaut $n!$.

Démo: Le nombre de permutation correspond au nombre d'arrangements à n éléments qui vaut $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-n+1) = n \times (n-1) \times \ldots \times 1 = n!$.

3 Combinaisons

3.1 Nombre de combinaisons

Définition: Soit E un ensemble de cardinal n. Soit $p \leq n$, une combinaison à p éléments de E est un sous-ensemble de E de cardinal p.

Exemple: Pour $E = \{1; 2; 3\}$, $F = \{1; 2\}$ est une combinaison à 2 éléments de E.

Remarque: Ici, contrairement aux arrangements, il n'y a pas d'ordre entre les éléments.

Proposition: Soit E un ensemble de cardinal n. L'ensemble formé par la collection des combinaisons à p éléments de E est de cardinal $\dfrac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démo: Nous savons que l'ensemble des arrangements à p éléments de E est de cardinal $n(n-1)\dots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.
Pour une combinaison à p éléments de E, il y a $p!$ arrangements différents qui correspondent aux différentes permutations des p éléments de E.
Donc le cardinal des combinaisons à p éléments vaut le cardinal des arrangements à p éléments divisé par $p!$.
Il vaut donc $\dfrac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

3.2 Coefficients binomiaux

Théorème: Ainsi pour $k \leq n$, $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Il s'agit des coefficients binomiaux.

Propriété: Symétrie, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Démo: $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$.

Propriété: $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$.

Démo: $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$, et par symétrie $\binom{n}{n} = 1$.

Propriété: $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{n-1} = n$.

Démo: $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{1!(n-1)!} = \dfrac{n!}{(n-1)!} = \dfrac{n \times (n-1)!}{(n-1)!} = n$, et par symétrie $\binom{n}{n-1} = n$.

3.3 Triangle de pascal

Proposition: $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

Démo: $$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\ &= \frac{k\times(n-1)!}{k\times(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-k)\times(n-1)!}{k!(n-k)\times(n-k-1)!} \\ &= \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(k+n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\end{aligned}$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

En représentant dans un tableau a double entrée, n et k, les coefficients binomiaux nous pouvons donc facilement calculer les coefficient d'une ligne à partir de ceux de la ligne précédente:

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Ce tableau représente le tableau des $\binom{n}{k}$ qui se construit en positionnant les 1 dans les cases $(n, 0)$ et (n, n), et en additionnant la cellule $(n-1, k-1)$ et $(n-1, k)$ pour obtenir la cellule (n, k), voir l'addition des 2 cellules rouges qui donne la cellule verte.