Géométrie dans l'espace
terminale

Sacha Darthenucq

Prérequis:

- **Vocabulaire ensembliste et logique (term)**

Remarque: Il est important de bien maîtriser les chapitres de géométrie de 2nd et de 1ère.

Jusqu'à présent la géométrie de lycée était de la géométrie plane (dans le plan). Désormais nous allons effectuer de la géométrie dans l'espace !

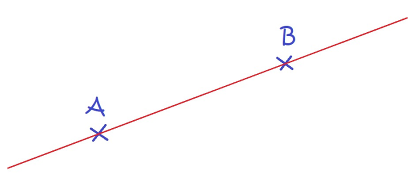
1 Plans de l'espace

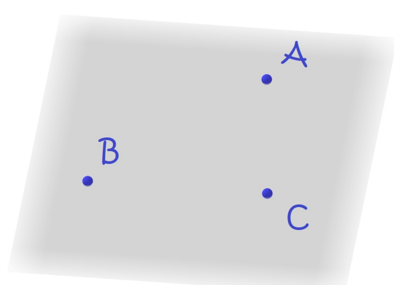
1.1 Règles élémentaires

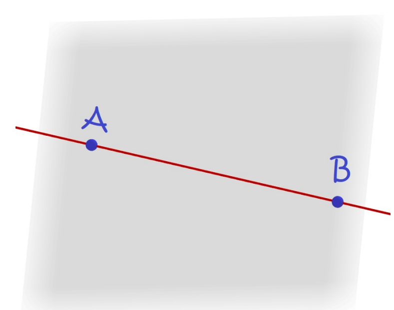
Théorème: Par deux points distincts de l'espace il passe une unique droite.

Théorème: Par trois points distincts A, B, C il passe un unique plan noté (ABC).

Théorème: Si deux point A et B appartiennent à un plan $\mathscr{P}$, alors la droite (AB) est incluse dans le plan $\mathscr{P}$, c'est à dire que l'ensemble des points de (AB) appartiennent à $\mathscr{P}$.







Théorème: Par tout point de l'espace il passe une unique droite parallèle à une droite donnée.

Théorème: Dans chaque plan de l'espace les règles de géométrie plane s'appliquent.

1.2 Caractérisation vectorielle d'un plan

Définition: Nous appelons direction d'un plan l'ensemble des vecteurs contenus dans ce plan.

Propriété: Deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'un plan $\mathscr{P}$ déterminent la direction du plan $\mathscr{P}$, c'est à dire que tout vecteur de $\mathscr{P}$ se décompose en une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

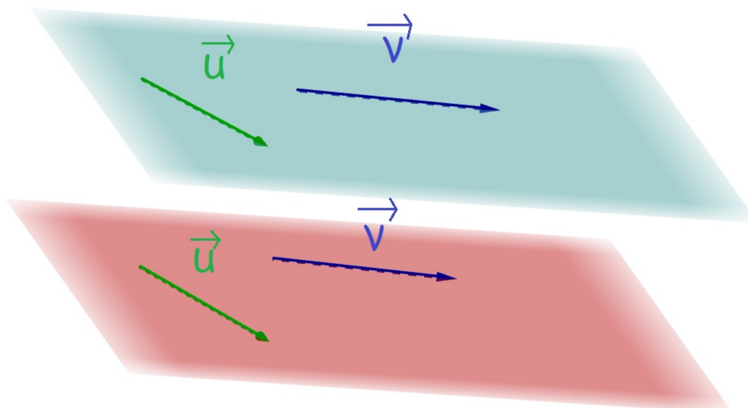
Démo: Dans le plan les règles de géométrie plane s'appliquent.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant non colinéaires, ils forment une base du plan $\mathscr{P}$. Tout vecteur de $\mathscr{P}$ se décompose donc selon $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
De plus toute combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ reste dans le plan.
Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ déterminent entièrement la direction de $\mathscr{P}$.

Remarque: Nous appelons combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}$, tout vecteur de la forme $\vec{v} = \lambda_1\vec{u_1} + \ldots + \lambda_n\vec{u_n}$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels.

Remarque: Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne déterminent cependant pas tout le plan $\mathscr{P}$.

Contre-exemple: Les plans bleu et rouge ont la même direction mais sont différents,



Propriété: Soit A un point de l'espace, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.
L'ensemble des point M tels que: "il existe x et y réels tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$" forme un plan de direction $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui passe par A noté $(A, \vec{u}, \vec{v})$.

Démo: Soit B et C deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Montrons que le plan définit précédemment correspond au plan (ABC) passant par les trois points A, B et C.

- Soit $M \in (ABC)$, comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs non colinéaires de (ABC), tout vecteur de (ABC) se décompose en une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
  Donc comme $\overrightarrow{AM} \in (ABC)$, il existe x et y réels tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
  $M \in (A, \vec{u}, \vec{v})$, soit $(ABC) \subset (A, \vec{u}, \vec{v})$.

- Soit $M \in (A, \vec{u}, \vec{v})$, alors il existe x et y réels tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.
  Soit N tel que $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AB}$. $N \in (AB)$ donc $N \in (ABC)$.
  La parallèle à AC passant par N, notons la (d), est donc incluse dans le plan (ABC).
  Or $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM} = x\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.
  Donc $\overrightarrow{NM} = y\overrightarrow{AC}$, soit $M \in (d)$.
  Donc $M \in (ABC)$, $(A, \vec{u}, \vec{v}) \subset (ABC)$.

Donc $(ABC) = (A, \vec{u}, \vec{v})$, $(A, \vec{u}, \vec{v})$ est un plan.

Remarque: Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donnent la direction du plan et le point A permet de le fixer quelque part dans l'espace.

1.3 Vecteurs coplanaires

Définition: Des vecteurs sont dits coplanaires ssi en prenant un point A quelconque les représentants de ces vecteurs d'extrémité A sont tous contenus dans un même plan.

Théorème: Des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ssi il existe a, b, c réels, dont au moins un non nul, tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$.

Démo: On suppose que les vecteurs sont non nuls car si au moins un vecteur est nul le résultat est immédiat.
Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires, alors $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ appartiennent à un même plan $\mathscr{P}$:

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors il existe k réel non nul tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
  Donc $1 \times \vec{u} - k \times \vec{v} + 0 \times \vec{w} = \vec{0}$.

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors ces deux vecteurs engendrent tout vecteur du plan $\mathscr{P}$.
  Or $\vec{w}$ vecteur de $\mathscr{P}$ donc il existe x et y réels tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
  Donc $x \times \vec{u} + y \times \vec{v} - 1 \times \vec{w} = \vec{0}$.

Si il existe a, b, c réels tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ avec au moins un des réels non nul, disons sans perte de généralité que c non nul, alors $\vec{w} = -\frac{a}{c}\vec{u} - \frac{b}{c}\vec{v}$.
Soit A un point quelconque du plan, notons B le point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et C le point tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, donc $\vec{w} = -\frac{a}{c}\overrightarrow{AB} - \frac{b}{c}\overrightarrow{AC}$.
Alors tout plan contenant les points A, B et C contient le point D tel que $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$
Bien sûr de tels plans existent donc $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires.

Conséquence: $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires ssi $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ implique $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$

2 Positions relatives des droites et des plans

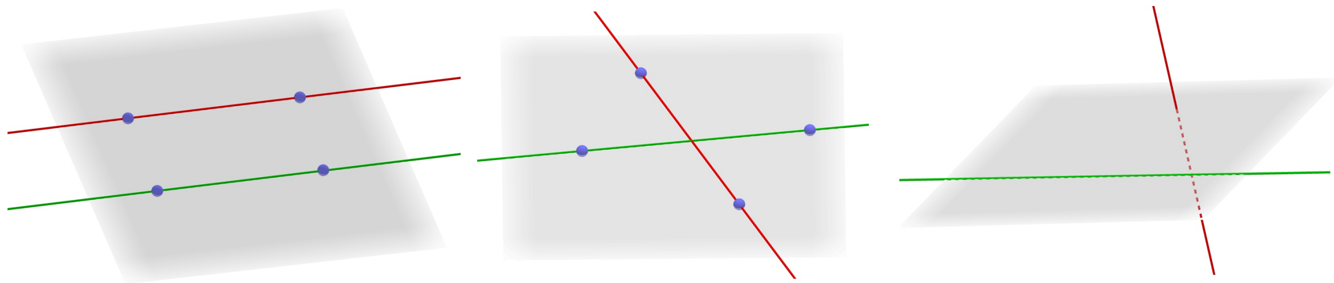
2.1 Positions relatives de deux droites

Définition: Deux droites sont dites coplanaires s'il existe un plan contenant ces deux droites.

Définition: Deux droites coplanaires sont dites parallèles si elles sont parallèles dans le plan qui les contient toute les deux (1ère figure).

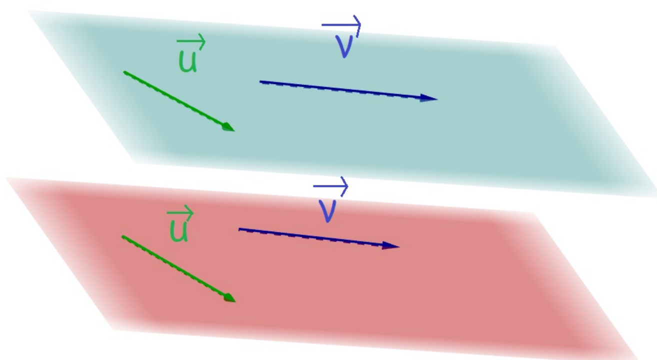
Définition: Deux droites coplanaires sont dites sécantes si elles sont sécantes dans le plan qui les contient toute les deux (2ème figure).

Définition: Deux droites sont dites non-coplanaires s'il n'existe pas de plan contenant ces deux droites (3ème figure).

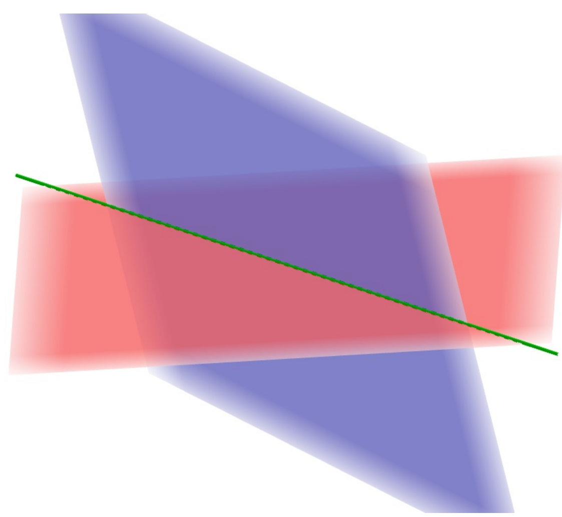


2.2 Positions relatives de deux plans

Définition: Deux plans sont dits parallèles s'ils ont la même direction.



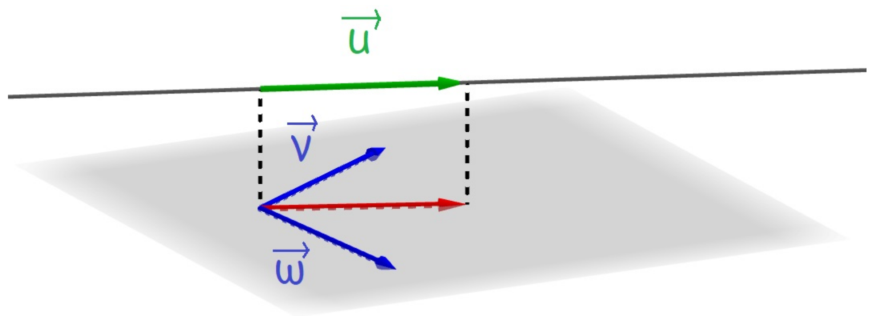
Conséquence: Si deux plans ne sont pas parallèles, alors ils se coupent selon une droite.



2.3 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Définition: Une droite (d) et un plan $\mathscr{P}$ sont parallèles ssi (d) est incluse dans $\mathscr{P}$ ou (d) et $\mathscr{P}$ n'ont pas de point commun.

Propriété: Soit (d) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathscr{P}$ un plan de base $(\vec{v}, \vec{w})$. (d) et $\mathscr{P}$ sont parallèles ssi $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires.



3 Bases et repères dans l'espace

3.1 Bases

Définition: Nous appelons base de l'espace tout triplet de vecteur $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ non coplanaires.

Proposition: Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base, alors il existe un unique triplet (x, y, z) de réels tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Ce triplet s'appelle les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Démo: **Existence:** Soit O et M deux points de l'espace tels que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$, soit $\mathscr{P}$ le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$. $\vec{k}$ n'est pas coplanaire avec $\vec{i}$ et $\vec{j}$, donc la droite (d) de vecteur directeur $\vec{k}$ passant par M coupe le plan $\mathscr{P}$ en un point N.
$N \in \mathscr{P}$ et $O \in \mathscr{P}$ donc $\overrightarrow{ON}$ est un vecteur de $\mathscr{P}$, il existe donc x et y réels tels que $\overrightarrow{ON} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
$N \in (d)$ et $M \in (d)$, donc $\overrightarrow{NM}$ est un vecteur directeur de (d). Or $\vec{k}$ en est aussi un donc il existe z réel tel que $\overrightarrow{NM} = z\vec{k}$.
Donc $\vec{u} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Nous avons montré l'existence du triplet (x, y, z).
Unicité: Si il existe aussi (x', y', z') tels que $\vec{u} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$, alors
$\vec{u} - \vec{u} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) - (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) = (x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + (z - z')\vec{k}$.
Soit $(x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + (z - z')\vec{k} = \vec{0}$.
Or $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ne sont pas coplanaires, donc $x - x' = 0$ et $y - y' = 0$ et $z - z' = 0$, soit $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$. L'unicité du triplet est démontrée.

Propriété: Soit $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ deux vecteurs de l'espace, λ un réel,

- $\vec{u} = \vec{v} \iff x = x',\ y = y',\ z = z'$,
- $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x', y + y', z + z')$,
- $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

3.2 Repères

Définition: Un repère de l'espace correspond à une base de l'espace munie d'un point appelé origine de l'espace. Il s'agit donc d'un quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec O un point de l'espace appelé origine du repère et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace.

Définition: Soit M un point de l'espace, nous appelons coordonnées du point M dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Propriété: Soit $A(x_a, y_a, z_a)$ et $B(x_b, y_b, z_b)$ deux points de l'espace, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a)$.

Démo: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Propriété: Soit $A(x_a, y_a, z_a)$ et $B(x_b, y_b, z_b)$ deux points de l'espace, le point I milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2}, \frac{z_a + z_b}{2})$.

Démo: $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

3.3 Équation paramétrique d'une droite

Proposition: Soit (d) une droite de vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$ passant par $A(x_0, y_0, z_0)$.

$$M(x, y, z) \in (d) \iff \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

Démo: Comme $A \in (d)$, $M \in (d) \iff \overrightarrow{AM}$ vecteur directeur de (d), soit il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$. $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ donc

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u} \iff \begin{cases} x - x_0 = ta \\ y - y_0 = tb \\ z - z_0 = tc \end{cases} \iff \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

Définition: Le système définit précédemment s'appelle une représentation paramétrique de la droite (d).

Remarque: Pour une droite (d) donnée il existe une infinité de représentation paramétriques (il suffit de choisir des point A différents) qui sont toutes équivalentes entre elles.