Orthogonalité dans l'espace
terminale

Sacha Darthenucq

Prérequis:

- **Vocabulaire ensembliste et logique (term)**
- **Géométrie dans l'espace (term)**

Remarque: Il est important de bien maîtriser le cours sur le produit scalaire de 1ère.

1 Produit scalaire dans l'espace

1.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition: Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, soit A, B, C trois points de l'espace tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Il existe au moins un plan $\mathscr{P}$ contenant ces trois points.
Nous appelons alors produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$ le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans le plan $\mathscr{P}$ tel qu'il a été définit en 1ère.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, alors $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$, sinon $\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$.

Remarque: Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan sont donc toujours valables dans l'espace, et les démonstrations étant les mêmes, elles ne seront pas refaites ici.

Propriété: $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}.\vec{u}$

Propriété: Soit A, B, C trois points. Notons H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \pm \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AH}\right\|$.

Propriété: Symétrie
Le produit scalaire est symétrique, c'est à dire que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

Propriété: Bilinéarité
Le produit scalaire est bilinéaire, c'est à dire que:

- Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{w} + \vec{x}) = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w} + \vec{u}.\vec{x} + \vec{v}.\vec{x}$,
- Pour tous réels k, k', $(k\vec{u}).(k'\vec{v}) = kk' \times (\vec{u}.\vec{v})$

1.2 Orthogonalité

Définition: Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux ssi $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Propriété: Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Soit A un point de l'espace et (d_u) et (d_v) les droites de vecteur directeur respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ passant par A.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\iff$ les droites (d_u) et (d_v) sont perpendiculaires.

1.3 Expression dans une base orthonormée

Définition: Une base de l'espace $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dite orthonormée ssi les vecteurs de cette base sont deux à deux orthogonaux et de norme 1, c'est à dire que $\vec{i}.\vec{j} = 0$, $\vec{i}.\vec{k} = 0$, $\vec{j}.\vec{k} = 0$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$.

Propriété: Soit $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ deux vecteurs de l'espace, alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Propriété: Soit $\vec{u}(x, y, z)$ un vecteur, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Démo: $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}.\vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$.
Donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Conséquence: Soit $A(x_a, y_a, z_a)$ et $B(x_b, y_b, z_b)$ deux points de l'espace,
$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}$.

2 Intersections de droites et de plans

2.1 Orthogonalité de deux droites

Définition: Soit (d_u) et (d_v) deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. (d_u) et (d_v) sont dites orthogonales ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ($\vec{u}.\vec{v} = 0$).

Définition: Deux droites sont dites perpendiculaires ssi elles sont coplanaires et orthogonales.

Proposition: Deux droites (d_u) et (d_v) sont orthogonales ssi il existe une droite (d'_u) parallèle à (d_u) et (d'_v) parallèle à (d_v) telles que (d'_u) et (d'_v) soient perpendiculaires.

Démo: Soit A un point de l'espace, (d'_u) la parallèle à (d_u) passant par A et (d'_v) la parallèle à (d_v) passant par A.
(d_u) et (d_v) orthogonales $\iff$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\iff$ (d'_u) et (d'_v) sont orthogonales.
Or il existe un plan $\mathscr{P}$ passant par le point A dont la direction comprend les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, donc (d'_u) et (d'_v) sont coplanaires.
Ainsi (d'_u) et (d'_v) orthogonales $\iff$ (d'_u) et (d'_v) perpendiculaires.
D'où (d_u) et (d_v) orthogonales $\iff$ (d'_u) et (d'_v) perpendiculaires.

2.2 Vecteur normal à un plan

Définition: Soit $\mathscr{P}$ un plan, un vecteur $\vec{n}$ non nul est dit normal au plan $\mathscr{P}$ ssi il est orthogonal à tout vecteur de la direction de $\mathscr{P}$.

Proposition: Soit $\mathscr{P}$ un plan, un vecteur $\vec{n}$ non nul est normal à $\mathscr{P}$ ssi $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction de $\mathscr{P}$.

Démo: **Si** $\vec{n}$ est normal à $\mathscr{P}$, alors $\vec{n}$ est orthogonal à tous les vecteurs de la direction de $\mathscr{P}$ donc en particulier à deux vecteurs non colinéaires de la direction de $\mathscr{P}$.
Si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires de la direction de $\mathscr{P}$. Alors nous avons vus que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ engendrent la direction de $\mathscr{P}$ c'est à dire que pour tout vecteur $\vec{w}$ de la direction de $\mathscr{P}$, il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.
$\vec{n}.\vec{w} = \vec{n}.(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda(\vec{n}.\vec{u}) + \mu(\vec{n}.\vec{v}) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0$.
Donc $\vec{n}$ orthogonal à tout vecteur de la direction de $\mathscr{P}$, donc $\vec{n}$ vecteur normal de $\mathscr{P}$.

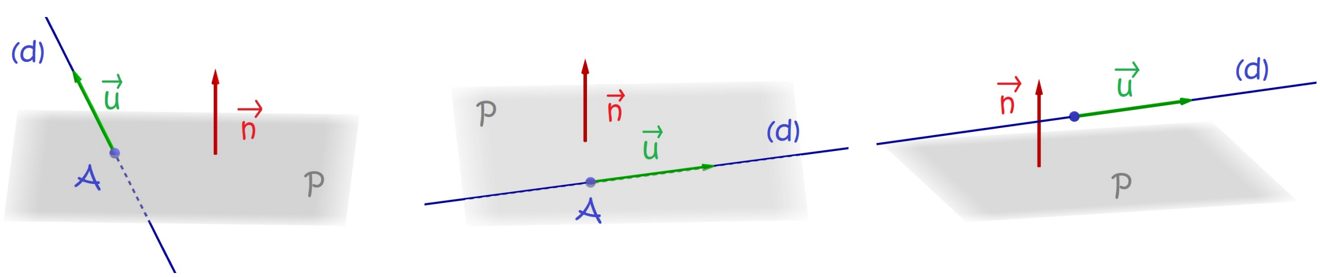
Théorème: Soit A un point de l'espace, $\vec{n}$ un vecteur non nul. L'unique plan $\mathscr{P}$ passant par A ayant $\vec{n}$ pour vecteur normal correspond à l'ensemble de points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.

2.3 Intersection d'une droite et d'un plan

Définition: Soit (d) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathscr{P}$ un plan. (d) est dite orthogonale à $\mathscr{P}$ ssi $\vec{u}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

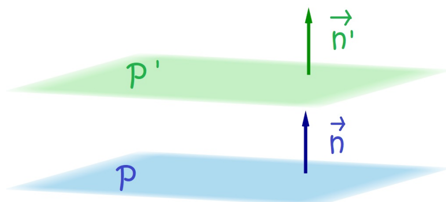
Propriété: Soit $\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et (d) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par A.

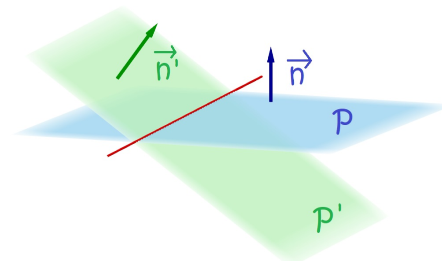
- Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux, la droite (d) et me plan $\mathscr{P}$ sont sécants,
- Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, alors
  - Si $A \in \mathscr{P}$, alors (d) est incluse dans $\mathscr{P}$,
  - Si $A \notin \mathscr{P}$, alors (d) est strictement parallèle à $\mathscr{P}$.



2.4 Intersection de deux plans

Propriété: Deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont parallèles ssi $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires. Sinon ils se coupent selon une droite.





3 Applications du produit scalaire dans l'espace

3.1 Formules de polarisation

Proposition: $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

Proposition: $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

Proposition: Formules de polarisation

$\vec{u}.\vec{v} = \dfrac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$ et $\vec{u}.\vec{v} = \dfrac{1}{4}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$

Démo: $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ donc $2\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.
De plus $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ donc
$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2) - (\|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2) = 4\vec{u}.\vec{v}$.

3.2 Distance

3.2.1 D'un point à une droite

Définition: Soit M un point de l'espace, (d) une droite de l'espace. Le projeté orthogonal de M sur (d) est le point H tel que: si $M \in (d)$, alors $H = M$, sinon H est le projeté orthogonal de M sur (d) dans l'unique plan $\mathscr{P}$ contenant le point M et la droite (d).

Remarque: Nous réutilisons la notion de projeté orthogonal dans le plan vu en 1ère.

Propriété: Le projeté orthogonal du point M sur (d) est le point de la droite (d) le plus proche de M.

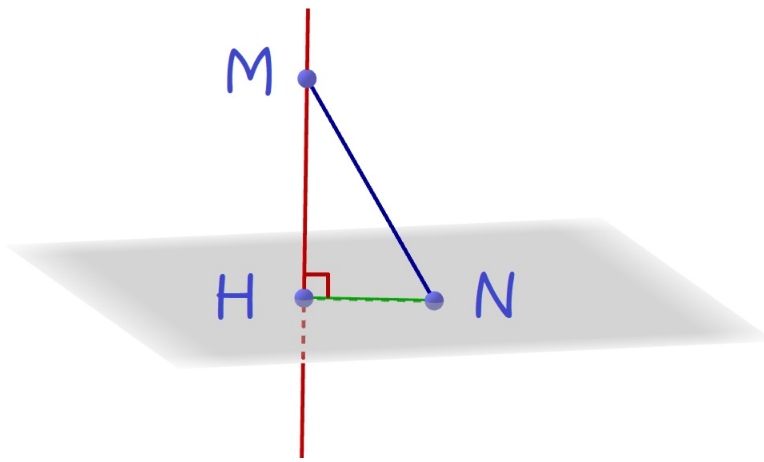
Définition: Nous appelons distance de M à (d) la longueur HM avec H projeté orthogonal de M sur (d).

3.2.2 D'un point à un plan

Définition: Soit M un point de l'espace, $\mathscr{P}$ un plan de l'espace. Le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$ correspond au point H intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite orthogonale à $\mathscr{P}$ passant par M.

Propriété: Le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$ correspond au point de $\mathscr{P}$ le plus proche de M.

Démo: Soit $\mathscr{P}$ un plan et M un point de l'espace.
Si $M \in \mathscr{P}$, alors $M = H$ et $MH = 0$. Pour tout point $N \in \mathscr{P}$ distinct de $H = M$, $MN > 0$ soit $MN > MH$.
Si $M \notin \mathscr{P}$, soit $N \in \mathscr{P}$, $N \neq H$, $\overrightarrow{HN}$ vecteur directeur de $\mathscr{P}$ donc $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{HN} = 0$, le triangle MNH est donc rectangle en H.



D'après le théorème de Pythagore nous avons $MH^2 + HN^2 = MN^2$, et comme $HN > 0$, $MN^2 > MH^2$ soit $MN > MH$.
Donc H est bien le point de $\mathscr{P}$ le plus proche de M.

3.3 Équation cartésienne d'un plan

Nous nous plaçons ici dans un repère orthonormé.

Proposition: Un plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ a une équation de la forme $ax+by+cz+d = 0$, c'est à dire qu'il existe d réel tel que
$M(x, y, z) \in \mathscr{P} \iff ax + by + cz + d = 0$.

Démo: Soit $\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ passant par le point $A(x_0, y_0, z_0)$.

$$\begin{aligned}
M(x,y,z) \in \mathscr{P} &\iff \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \\
&\iff (x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c = 0 \\
&\iff ax + by + cz + (-x_0a - y_0b - y_0c) = 0 \\
M(x,y,z) \in \mathscr{P} &\iff ax + by + cz + d = 0 \text{ avec } d = (-x_0a - y_0b - y_0c).
\end{aligned}$$

Proposition: Soit a, b, c trois réel dont au moins un est non nul, soit d un réel. L'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$.

Démo: Au moins un des trois réels a, b, c est non nul, supposons sans perte de généralité $a \neq 0$.
Le point $A\left(\frac{-d}{a}, 0, 0\right)$ vérifie $ax + by + cz + d = 0$.

$$\begin{aligned} ax + by + cz + d = 0 &\iff ax + by + cz + a \times \frac{d}{a} = 0. \\ &\iff a\left(x - \frac{-d}{a}\right) + by + cz = 0 \end{aligned}$$

$ax + by + cz + d = 0 \iff \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ avec $\vec{n}(a, b, c)$ et $M(x, y, z)$.
Donc l'ensemble des points M vérifiant $ax + by + cz + d = 0$ correspond à l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ c'est à dire l'ensemble de points du plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$.