Nombres Complexes: Point de vue Algébrique
Terminale

Sacha Darthenucq

Prérequis:

- **Vocabulaire ensembliste et logique (Term)**
- **Raisonnement par récurrence (Term)**
- **Dénombrement (Term)**

1 Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

1.1 Construction

Théorème: Il existe une structure notée $\mathbb{C}$ telle que:

- $\mathbb{C}$ soit muni de la multiplication et de l'addition existant dans $\mathbb{R}$,
- il existe un nombre $i \in \mathbb{C}$ tel que $i^2 = -1$,
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique couple de réels (x, y) tel que $z = x + iy$.

Remarque: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, en effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x = x + i \times 0$ donc $x \in \mathbb{C}$.

Définition: Soit $z \in \mathbb{C}$, on appelle partie réelle de z notée $Re(z)$ et partie imaginaire de z notée $Im(z)$, les deux réels tels que $z = Re(z) + i \times Im(z)$.

Remarque: Dans les prochaines démo, nous noterons par commodité x à la place de $Re(z)$ et y à la place de $Im(z)$.

Remarque: Par construction de $\mathbb{C}$, les parties imaginaires et réelles d'un nombre complexe sont uniques.

Définition: Un nombre complexe dont la partie imaginaire vaut 0 est appelé un nombre réel, un nombre complexe dont la partie réelle vaut 0 est appelé un imaginaire pur.

1.2 Addition, multiplication

Propriétés: Soit z et z' deux nombres complexes:

- $Re(z + z') = Re(z) + Re(z')$,
- $Im(z + z') = Im(z) + Im(z')$.

Démo: $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ donc
$z + z' = x + x' + iy + iy'$
$z + z' = (x + x') + i(y + y')$.
Propriétés: Soit z et z' deux nombres complexes:

- $Re(z \times z') = Re(z)Re(z') - Im(z)Im(z')$,
- $Im(z \times z') = Re(z)Im(z') + Im(z)Re(z')$.

Démo: $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ donc

$$\begin{aligned} z \times z' &= (x + iy) \times (x' + iy') \\ &= xx' + ixy' + iyx' + i^2yy' \\ &= xx' + i(xy' + yx') - yy' \\ z \times z' &= (xx' - yy') + i(xy' + yx') \end{aligned}$$

2 Propriétés algébriques

2.1 Conjugué, inverse

Définition: Soit z un nombre complexe s'écrivant $z = x + iy$ avec x et y réels. Nous appelons conjugué de z le complexes $\bar{z}$ avec $\bar{z} = x - iy$.

Définition: Soit z un nombre complexe non nul, c'est à dire dont la partie imaginaire ou la partie réelle est non nulle, alors z admet un unique inverse noté $\frac{1}{z}$.

Méthode: Calcul de l'inverse d'un nombre complexe
Soit $z = 1 - 2i$ exprimons la partie réelle et imaginaire de $\frac{1}{z} = \frac{1}{1-2i}$.
A priori impossible de le dire directement puisque il y a des i au dénominateur. Pour les faire disparaitre du dénominateur nous allons multiplier par le conjugué.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1-2i} \times \frac{1+2i}{1+2i}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1+2i}{(1-2i)(1+2i)}$$

Nous avons fait apparaitre au dénominateur une identité remarquable $(a-b)(a+b)$ qui vaut donc $a^2 - b^2$.
D'où $\frac{1}{z} = \frac{1+2i}{1^2 - (2i)^2} = \frac{1+2i}{1-(-4)} = \frac{1}{5} + i\frac{2}{5}$.
Nous avons pu obtenir l'expression de $\frac{1}{z}$ avec ses parties réelles et imaginaires.

Propriétés: Soit z et z' deux nombres complexes:

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$,
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$,
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$.

Démo: Il suffit de calculer séparément les termes à droite et à gauche de chaque égalité et de vérifier qu'ils sont égaux.
Calcul pour le produit:
$z \times z' = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$
Donc $\overline{z \times z'} = (xx' - yy') - i(xy' + yx')$
De même $\bar{z} \times \bar{z}' = (x - iy) \times (x' - iy') = (xx' - yy') - i(xy' + yx')$
Nous avons bien $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$.

Conséquence: Soit z un nombre complexe, pour tout entier naturel n, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.

2.2 Formule du binôme

Théorème: Soit a et b deux nombres complexes, pour tout entier naturel n nous avons

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Remarque: Ce théorème est vrai dans $\mathbb{C}$ donc dans $\mathbb{R}$.

Démo: Nous allons utiliser un raisonnement par récurrence.
Soit a et b deux nombres complexes.
Montrons que P_n:"$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$" est vraie pour tout entier naturel n.

Initialisation: Au rang 0, $(a+b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$, donc P_0 vraie.

Hérédité: Montrons que $P_n \implies P_{n+1}$, pour cela supposons P_n vraie.
$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$.
Par hypothèse de récurrence, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
D'où:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \times \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^{n-n} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1-0} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{(k+1)-1} a^{k+1} b^{n+1-(k+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1}
\end{aligned}$$

Posons $k' = k$ dans la première somme. Quand $k = 0$ nous avons $k' = 1$ et quand $k = n-1$ nous avons $k' = n$.

$$= \sum_{k'=1}^{n} \binom{n}{k'-1} a^{k'} b^{n+1-k'} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1}$$

Remplaçons la lettre k' par k:

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1}$$

Nous pouvons additionner les deux sommes car elles varient toutes deux de 1 à n avec l'indice k:

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \right) + a^{n+1} + b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1}$$

Or $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$,

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} a^0$$

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

Conclusion: Par principe de récurrence, pour tout entier naturel n, P_n est vraie.