Nombre complexes: point de vue géométrique
Terminale

Sacha Darthenucq

Prérequis:

- **Nombres complexes, point de vue algébrique (term)**
- **Vocabulaire ensembliste et logique (term)**

1 Représentation dans le plan

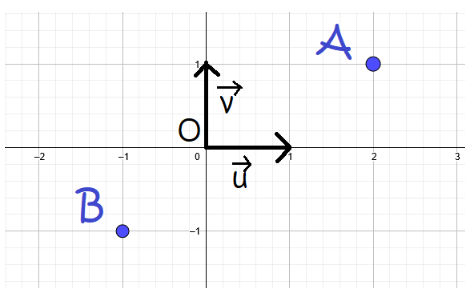
1.1 Affixe d'un point

Définition: Nous appelons plan complexe le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Définition: A tout complexe z qui s'écrit sous l'unique forme $z = x + iy$, avec x et y réel, nous associons un unique point $M(x; y)$ du plan appelé point image de z. De même à tout point $M(x; y)$ du plan complexe nous associons un unique complexe $z = x + iy$ appelé affixe de M.

Remarque: L'axe des abscisses correspond à l'axe des réels $(y = 0)$ et l'axe des ordonnées correspond à l'axe des imaginaires purs $(x = 0)$.

Exemple:

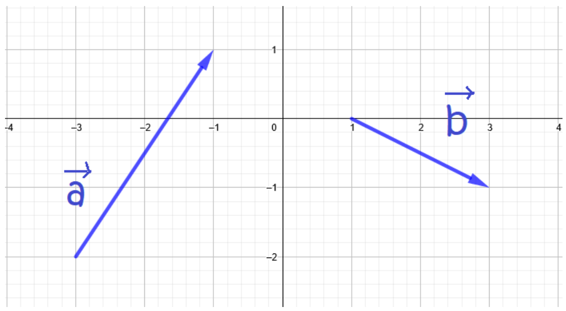


Le point $A(2; 1)$ a pour affixe $2 + i$, le point $B(-1; -1)$ a pour affixe $-1 - i$.

1.2 Affixe d'un vecteur

Définition: De même, à tout nombre complexe $z = x + iy$ nous associons un vecteur (non unique) $\vec{w}$ $(x; y)$ du plan complexe appelé vecteur image de z. A tout vecteur $\vec{w}$ $(x; y)$ du plan nous associons un unique complexe $z = x + iy$ appelé affixe du vecteur $\vec{w}$.

Exemple:



Le vecteur $\vec{a}(2; 3)$ a pour affixe $2 + 3i$, le vecteur $\vec{b}(2; -1)$ a pour affixe $2 - i$.

1.3 Propriétés

Propriété: Soit A et B deux points d'affixes respectives z_a et z_b. Le point I milieu de $[AB]$ a pour affixe $\dfrac{z_a + z_b}{2}$.

Démo: Les coordonnées de I milieu de $[AB]$ sont $\left(\dfrac{x_a + x_b}{2}; \dfrac{y_a + y_b}{2}\right)$.

Propriété: Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixes z et z', soit λ et μ deux réels. Le vecteur $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ à pour affixe $\lambda z + \mu z'$.

Démo: De même la propriété est immédiate avec les coordonnées.

Propriété: Soit M un point d'affixe z, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe z.

Propriété: Soit A et B deux points d'affixes z_a et z_b. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_b - z_a$.

Démo: De même les propriétés sont immédiates avec les coordonnées.

2 Module

2.1 Définition

Définition: Soit z un nombre complexe, $z = x + iy$. Nous appelons module de z le réel positif $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Remarque: Le module est une généralisation de la valeur absolue, pour z réel nous avons $|z| = \sqrt{z^2}$ ce qui correspond à la valeur absolue, d'où la même notation ($|\ |$).

Propriété: Dans le plan complexe, un vecteur $\vec{w}$ d'affixe z est de longueur $|z|$.

Démo: $\vec{w}$ a z pour affixe donc $\vec{w}(x; y)$ avec $z = x + iy$. Donc la longueur de $\vec{w}$ vaut $\sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.

Conséquence: Soit A et B deux points d'affixes respectives z_a et z_b. La longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$ vaut $|z_b - z_a|$.

Conséquence: Soit M un point d'affixe z, alors le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour longueur $|z|$.

2.2 Propriétés

Propriété:

- $|z| = 0 \iff z = 0$,
- $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$,
- $z\bar{z} = |z|^2$.

Démo:

- Si $z = 0$ alors $|z = 0|$ immédiat.
  Si $|z| = 0$ alors $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$ donc $x^2 + y^2 = 0$. Or $x^2 \geq 0$ et $y^2 \geq 0$ donc $x = 0$ et $y = 0$. Nous avons donc $z = 0 + 0i = 0$.
- Immédiat
- $z\bar{z} = (x + iy) \times (x - iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

Propriété: Soit z et z' deux nombres complexes,

- $|zz'| = |z||z'|$,
- Si $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

Démo: A vous de vérifier les égalités en calculant.

Conséquence:

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$,
- Pour $z \neq 0$, $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$.

Théorème: Inégalité triangulaire
Soit z et z' deux complexes, $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.
Si $|z + z'| = |z| + |z'|$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z = \lambda z'$ (et réciproquement).

2.3 Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.

Définition: L'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 est $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$.

Propriété: Stabilité de $\mathbb{U}$ par produit et passage à l'inverse

Soit z et z' deux nombres complexes de module 1, $zz' \in \mathbb{U}$ et $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$.

Démo: $|zz'| = |z||z'| = 1 \times 1 = 1$.

3 Argument

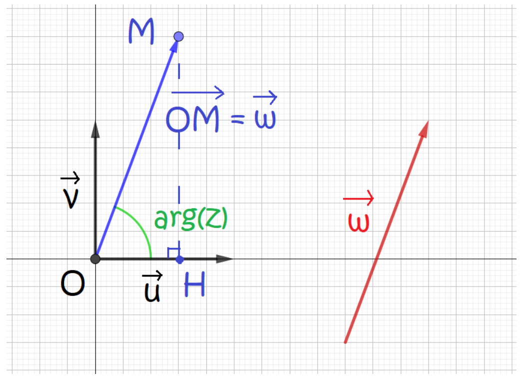
3.1 Définition

Déf / prop: Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = x + iy$.
Il existe des réels θ, appelés arguments de z, tels que $\cos(\theta) = \dfrac{x}{|z|}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{y}{|z|}$.

Remarque: z à une infinité d'arguments, soit θ un argument de z alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\theta + 2k\pi$ est un argument de z.

Démo: Il faut prouver l'existence d'un θ.
Nous savons que $x^2 + y^2 = |z|^2$ soit $\left(\dfrac{x}{|z|}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{|z|}\right)^2 = 1$.
$-1 \leq \dfrac{x}{|z|} \leq 1$, et cos est continue sur $[0; \pi]$ avec $\cos([0; \pi]) = [-1; 1]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\theta \in [0; \pi]$ tel que $\cos(\theta) = \dfrac{x}{|z|}$.
Ainsi comme $\cos(\theta)^2 + sin(\theta)^2 = 1$, nous avons $\sin(\theta) = \pm\dfrac{y}{|z|}$.
Si $\sin(\theta) = +\dfrac{y}{|z|}$ c'est fini.
Sinon $\sin(\theta) = -\dfrac{y}{|z|}$, or $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ et $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$, donc en posant $\theta' = -\theta$ nous obtenons bien $\cos(\theta') = \dfrac{x}{|z|}$ et $\sin(\theta') = \dfrac{y}{|z|}$
Nous avons prouvé l'existence d'un argument pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$

Propriété: Soit un plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, z un nombre complexe de vecteur associé $\vec{w}$ et de point associé M, alors $(\vec{u}; \vec{w}) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = \arg(z)\ (2\pi)$.



Démo: Nous nous plaçons dans un cas facile, $x > 0$ et $y > 0$, les autres cas sont un peu plus délicats à traiter ce qui est inutile dans le cadre de ce cours.
Dans le triangle rectangle (visible sur le schéma avec les pointillés) d'hypoténuse OM, nous avons par formules de trigonométrie que $cos(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \dfrac{OH}{OM}$. Or $OM = |z|$ et $M(x; y)$ donc $OH = x$.
Donc $cos(\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = \dfrac{x}{|z|} = \cos(\theta)$.
De même nous obtenons $\sin(\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = \sin(\theta)$.
Ces deux conditions assurent $(\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = \theta\ (2\pi)$.

Conséquences: Soit A et B deux points distincts d'affixes z_a et z_b, alors $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_b - z_a)$.

3.2 Forme trigonométrique

Définition: Soit z un nombre complexe de module r et d'argument θ. Nous pouvons écrire sous sa forme trigonométrique $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.

Propriété: Soit z et z' deux nombres complexes non nuls, $z = z' \iff r = r'$ et $\theta = \theta'\ (2\pi)$.

3.3 Propriétés

Propriétés:
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$ et $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ (2\pi)$,
- $z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) = 0\ (2\pi)$ et $z \in i\mathbb{R} \iff \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$.

Démo: Tous ces résultats se déduisent soit graphiquement en utilisant le fait que pour $z = x + iy$, $\arg(z) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM})$ avec $M(x; y)$, soit par des calculs sur les différents cos et sin lorsque par exemple $\bar{z} = x - iy$ donc $\cos(\arg(\bar{z})) = \cos(\arg(z))$ mais $\sin(\arg(\bar{z})) = -\sin(\arg(z))$ ce qui implique $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$ modulo 2π...

Propriété: Soit z et z' deux nombres complexes non nuls,

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ (2\pi)$,
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)$, donc $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z)$
- Pour $n \in \mathbb{Z}$, $\arg(z^n) = n\arg(z)$.

Démo:

- $z = |z|(\cos(\theta) + \sin(\theta))$ et $z' = |z'|(\cos(\theta') + \sin(\theta'))$
  Donc $zz' = |z||z^prime|(\cos(\theta) + \sin(\theta))(\cos(\theta') + \sin(\theta'))$
  $= |zz'|((\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')) + i(\sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta')))$
  Grâce aux formules trigonométriques nous obtenons
  $zz' = |zz'|(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta'))$.
  Nous avons donc bien $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ (2\pi)$.
- $\arg(1) = 0$ donc $\arg\left(\dfrac{1}{z} \times z\right) = \arg\left(\dfrac{1}{z}\right) + \arg(z) = 0\ (2\pi)$.
  Donc $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ (2\pi)$.