Nombres Complexes: point de vue Trigonométrique
Terminale

Sacha Darthenucq

Prérequis:

- **Nombres complexes: point de vue arithmétique (term)**
- **Nombres complexes: point de vue géométrique (term)**
- **Vocabulaire ensembliste et logique (term)**

1 Formules de trigonométrie

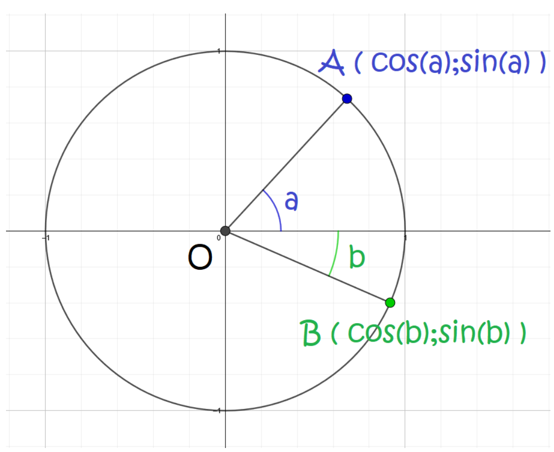
1.1 Formules d'addition

Propriétés: Soit a et b deux réels,

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$,
- $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$.

Démo:

- Nous allons utiliser le produit scalaire,



$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \times \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$
Ici $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -a + b$ car l'angle a est positif, mais il faut le "compter" dans le sens négatif, c'est à dire de $\overrightarrow{OA}$ vers $\overrightarrow{OB}$. L'angle b est lui déjà bien orienté dans le sens négatif.
$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 1 \times 1 \times \cos(-a + b)$.
A l'aide des coordonnées, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.

Donc $\cos(-a+b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$, en remplaçant a par $-a$ nous obtenons, $\cos(-(-a)+b) = \cos(-a)\cos(b) + \sin(-a)\sin(b)$ et comme $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$,
$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

- Maintenant utilisons le fait que $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$, et $\sin(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$.
  Démontrons cette affirmation brièvement, à l'aide de la formule précédente nous établissons facilement $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$.
  Ensuite nous utilisons le fait que les vecteur $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ avec $M(\cos(x), \sin(x))$ et $M'(\cos(x + \frac{\pi}{2}), \sin(x + \frac{\pi}{2}))$ soient orthogonaux, l'angle les séparant étant de $\frac{\pi}{2}$.
  Donc $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = 0$ soit $\cos(x)\cos(x + \frac{\pi}{2}) + \sin(x)\sin(x + \frac{\pi}{2}) = 0$.
  En changeant x par $-x$ nous obtenons alors $\cos(x)\cos(\frac{\pi}{2} - x) - \sin(x)\sin(\frac{\pi}{2} - x) = 0$.
  Donc $\cos(x)\sin(x) = \sin(x)\sin(\frac{\pi}{2} - x)$, d'où $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$ ouf!

  Ainsi $\cos(\frac{\pi}{2} - (a+b)) = \sin(a+b)$ et
  $\cos(\frac{\pi}{2} - (a+b)) = \cos((\frac{\pi}{2} - a) - b) = \cos(\frac{\pi}{2} - a)\cos(-b) - \sin(\frac{\pi}{2} - a)\sin(-b)$.
  Donc $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

Conséquence:

- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$,
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$.

1.2 Formules de duplication

Propriété:

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$,
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.

Démo: Application directe des formules précédentes.

Proposition:

- $\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$,
- $\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$.

Démo: $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$ et $\cos^2 + \sin^2 = 1$ donc $\sin^2 = 1 - \cos^2$.
D'où $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$ soit $\cos^2(a) = \dfrac{1 + cos(2a)}{2}$.
De même comme $\cos^2 = 1 - \sin^2$, nous avons $\cos(2a) = -1 - 2\sin^2(a)$ soit $\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$.

2 Exponentielle complexe

2.1 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Définition: Nous appelons exponentielle complexe la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui à $\theta \in \mathbb{R}$ associe le complexe $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Théorème: Pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, $z = |z| \times e^{i\arg(z)}$, il s'agit de sa forme exponentielle.

Démo: Découle immédiatement du chapitre précédent avec l'écriture de z en fonction de son module et argument.

2.2 Propriétés

Propriété:

- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$,
- $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ donc $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$,
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$,
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

Démo: Découle directement des propriétés sur les arguments, appliqués à des complexes de modules 1, complexes de $\mathbb{U}$.

3 Formules de Moivre et d'Euler

3.1 Formules d'Euler

Proposition:

- $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$,
- $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2i}$.

Démo:

- $$\begin{aligned} e^{i\theta} + e^{-i\theta} &= \cos(\theta) + i\sin(\theta) + (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \\ &= \cos(\theta) + i\sin(\theta) + (\cos(\theta) - i\sin(\theta)) \\ e^{i\theta} + e^{-i\theta} &= 2\cos(\theta) \end{aligned}$$
- De même en déroulant le calcul nous obtenons $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta)$

3.2 Formule de Moivre

Proposition: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + \sin(n\theta)$.

Démo: Immédiat car $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.