Vocabulaire ensembliste et logique
Terminale

Sacha Darthenucq

1 "Pour tout" et "Il existe"

Nous allons aborder 2 nouvelles notations qui sont hors programme mais très utile:

- $\forall$ désigne "pour tout"
- $\exists$ désigne "il existe"

Exemple: "$\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \geq n$" se lit pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, n^2 est supérieur ou égal à n, cette proposition est d'ailleurs vrai car elle est bien vérifiée pour tous les entiers naturels.
"$\exists n \in \mathbb{N}, n^2 \geq n$" est vrai aussi car comme cela est vrai pour tous les entiers naturels, il en existe au moins 1 pour lequel cela marche.

Exemple: "$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$", est une propriété fausse. En effet $-1 \in \mathbb{R}$ mais $\sqrt{(-1)^2} = 1 \neq -1$, donc comme pour un des $x \in \mathbb{R}$ la propriété est fausse, elle n'est pas vraie pour tous les x.
Par contre "$\exists x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$" est vraie car cela marche pour tous les réels positifs.

2 Négation

Lorsque que l'on effectue la négation d'un "Pour tout" ($\forall$), il se transforme en "Il existe" ($\exists$) et inversement.
Exemple: La négation de "$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$" est "$\exists x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} \neq x$".
En effectuant la négation du $\forall$, nous obtenons un $\exists$ et pour la négation du $=$ nous obtenons $\neq$.
Remarquons que le raisonnement utilisé précédemment pour montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$ est fausse à consisté à montrer que sa négation, à savoir $\exists x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} \neq x$ est vraie.

Exemple: La négation de "$\exists n \in \mathbb{N}, n^2 \geq n$" est "$\forall n \in \mathbb{N}, n^2 < n$, la négation de $\geq$ étant $<$.